Esercizio 803
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx$$

***

Soluzione

Qui abbiamo una funzione razione impropria, per cui eseguiamo la divisione tra polinomi, ottenendo:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} = \frac{1}{x} + x + \frac{1 - x}{x^2 - 2x + 3},$$

onde l'integrale si esprime:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx = \ln |x| + \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3} dx,$$

resta quindi da calcolare l'integrale a secondo membro. Ques'ultimo si calcola facilmente, poiché:

$$x - 1 = \frac{1}{2} d \left(x^2 - 2x + 3 \right)$$

Quindi:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - 2x + 3 \right| + C_1$$

Si conclude che l'integrale proposto è dato da:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} + C$$