Esercizio 795
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare gli integrali:

1. $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$

2. $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

***

Soluzione

1. L'integrando

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3),$$

quindi:

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}$$

Perciò decomponiamo in fattori lineari distinti:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} \\ &= \frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+3B+2C) - 6A}{x(x-2)(x+3)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B+C)x^2 + (A+3B+2C)x - 6A = x+1$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+3B+2C=0 \\ 6A+0+0=-1 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A = -\frac{1}{6}, B = \frac{3}{10}, C = -\frac{2}{5}$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx &= -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x}+\frac{3}{10}\int \frac{dx}{x-2}-\frac{2}{15}\int \frac{dx}{x+3}\\ &= -\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+C\\ &= \ln\frac{|x-2|^{3/10}}{|x|^{1/6}|x+3|^{2/15}}+C\end{aligned}$$

2. L'integrando

$$f(x)=\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Intanto osservamo che:

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1),$$

quindi:

$$f(x)=\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}$$

Decomponiamo in fattori lineari ripetuti:

$$\begin{aligned}\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}\\ &= \frac{A(x-1)^2+B_1(x+1)(x-1)+B_2(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}\\ &= \frac{(A+B_1)x^2+(B_2-2A)x+A-B_1+B_2}{(x+1)(x-1)^2}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B_1)x^2+(B_2-2A)x+A-B_1+B_2=3x+5$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B_1+0=0\\ -2A+0+B_2=3\\ A-B_1+B_2=5\end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A=\frac{1}{2}, B_1=-\frac{1}{2}, B_2=4$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}+4\int \frac{dx}{(x-1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{1}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C\end{aligned}$$