Esercizio 791
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = x \cdot 2^{\frac{1+x}{1-x}} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per ogni $x \neq 1$

$$X = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0, 0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.
Simmetrie
La funzione non ha parità definita, per cui il grafico non è simmetrico nè rispetto all'asse y e nè rispetto all'origine delle coordinate.
Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$$

Segue che il grafico giace nel semipiano $y > 0$ se e solo se $x > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= 1^- \cdot 2^{+\infty} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= 1^+ \cdot 2^{-\infty} = 0^+ \end{aligned} \tag{2}$$

Dalle (2) segue che il diagramma situato nel semipiano $x < 1$ è asintotico alla retta verticale $x = 1$, mentre il diagramma situato nel semipiano $x > 1$ ha, per $x = 1$, un *punto di arresto*. Per calcolare i limiti per $x \to 1^{\pm}$, sfruttiamo la simmetria del diagramma rispetto all'asse y, ottenendo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= 0^+ \end{aligned} \tag{3}$$

Dalle (3) segue che il diagramma situato nel semipiano $x < 1$ è asintotico alla retta verticale $x = 1$.
Comportamente all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot 2^{-1} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty) \cdot 2^{-1} = -\infty$$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$$m_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2^{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}$$
$$n_1 = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \to +\infty} x \left(2^{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{2} \right) = 0 \cdot \infty$$

Per rimuovere tale forma indeterminata procediamo nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} x \left(2^{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} \left(2^{\frac{2}{1-x}} - 1 \right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1-x} \cdot \frac{x}{2} \frac{2^{\frac{2}{1-x}} - 1}{\frac{2}{1-x}} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1-x} \right)}_{=-1} \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{\frac{2}{1-x}} - 1}{\frac{2}{1-x}} \right)
\end{aligned}$$

Calcoliamo il secondo limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{\frac{2}{1-x}} - 1}{\frac{2}{1-x}} = \frac{0}{0} \tag{4}$$

Eseguendo il cambio di variabile:

$$t = \frac{2}{1-x},$$

riconduciamo il limite (4) al limite notevole:

$$\lim_{t \to 0} \frac{2^t - 1}{t} = \ln 2$$

Finalmente:

$$n_1 = -\ln 2$$

Pertanto la retta di equazione:

$$y = \frac{1}{2}x - \ln 2 \tag{5}$$

È asintoto obliquo a destra.
Per la ricerca dell'asintoto obliquo a sinistra, perveniamo agli stessi risultati:

$$m_2 = \frac{1}{2}, n_2 = -\ln 2$$

onde la retta (5) è asintoto obliquo sia a sinistra che a destra.
Quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a sinistra e a destra.
Derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = 2^{\frac{1+x}{1-x}} \frac{x^2 + 2x(\ln 2 - 1) + 1}{(1-x)^2} \tag{6}$$
$$f''(x) = 2^{\frac{-3+x}{-1+x}} \frac{\ln 2 [x(\ln 2 - 1) + 1]}{(1-x)^4}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Ricerca degli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 2x(\ln 2 - 1) + 1 = 0$$

Osserviamo che il discriminante di $x^2 + 2x(\ln 2 - 1) + 1 = 0$ è:

$$\Delta = \ln 2 (\ln 2 - 2) < 0,$$

onde $x^2 + 2x(\ln 2 - 1) + 1 = 0 > 0, \forall x \Longrightarrow f'(x) > 0$, cioè la funzione è strettamente crescente.
Determiniamo ora il comportamento della derivata prima in un intorno destro di $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \underbrace{\lim_{x \to 1^+} \left[x^2 + 2x(\ln 2 - 1) + 1\right]}_{2+2\ln 2} \cdot \lim_{x \to 1^+} \frac{2^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^2}$$

Calcoliamo a parte il secondo limite:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^2} = \frac{0}{0}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\frac{1+x}{1-x} = t \Longrightarrow 1 - x = \frac{2}{t+1}$$

Quindi:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^2} = \lim_{t \to -\infty} \frac{(t+1)^2}{2^{-t}} = 0$$

Perciò:

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 0$$

Si conclude che il ramo del diagramma uscente dal punto $(1,0)$ è ivi tangente all'asse x.
Concavità e punti di flesso
Ricerca degli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x(\ln 2 - 1) + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{1 - \ln 2}$$

Studio del segno:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, x_f),$$

essendo:

$$x_f = \frac{1}{1 - \ln 2}$$

Il diagramma volge la concavità verso l'alto per $x \in (-\infty, 1) \cup (1, x_f)$, mentre volge la concavità verso il basso per $x \in (x_f, +\infty)$. Quindi abbiamoil punto di flesso x_f:

$$F_1\left(\frac{1}{1 - \ln 2}, \frac{2}{e^2(1 - \ln 2)}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (1)

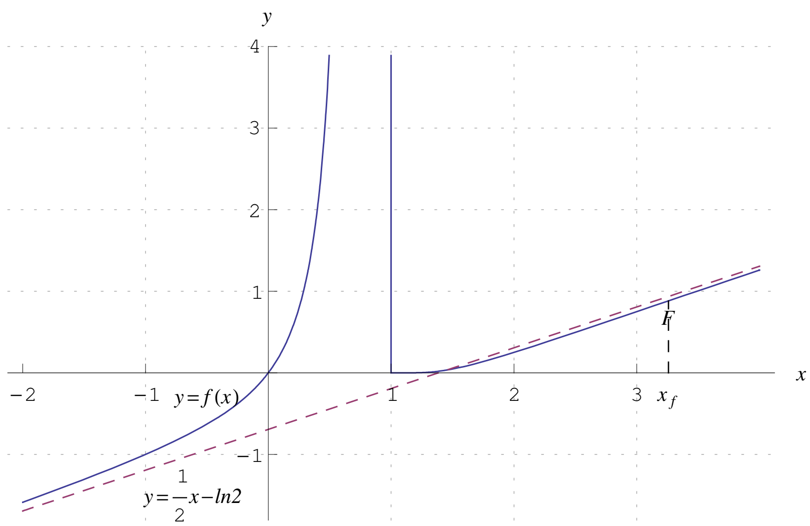

Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = x \cdot 2^{\frac{1+x}{1-x}}$