Esercizio 783
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan x^x \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi
Risulta:

$$\forall x \in X,\ f(x) > 0 \tag{2}$$

Quindi:

$$\nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno della funzione
In forza della (2) segue che il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^0 \tag{3}$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, calcoliamo dapprima $\lim_{x \to 0^+} x^x$, scrivendo:

$$x^x = e^{x \ln x},$$

quindi:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \to 0^+} x \ln x}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0^-,$$

per cui:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1^- \Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \arctan 1^- = \frac{\pi}{4}^-$$

Ciò implica che $x=0$ è una discontinuità eliminabile. Possiamo prolungare per continuità:

$$f(x)=\begin{cases}\arctan x^x, & x>0\\ \frac{\pi}{4}, & x=0\end{cases} \tag{4}$$

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x^x=\arctan\left(\lim_{x\to+\infty}x^x\right)=\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}^-$$

Pertanto la retta di equazione $2y-\pi=0$ è asintoto orizzontale a destra.

Derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{x^x(\ln x+1)}{1+x^{2x}}\\ f''(x)&=\frac{x^{x-1}\left[1+x+x^{2x}-x^{1+2x}-2x\left(x^{2x}-1\right)\ln x-x\left(x^{2x}-1\right)\ln^2 x\right]}{\left(1+x^{2x}\right)^2}\end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della derivata prima:

$$f'(x)=0\Longleftrightarrow \ln x+1=0\Longleftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

Segno

$$f'(x)>0\Longleftrightarrow x>\frac{1}{e}$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, mentre è strettamente decrescente in $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$. Quindi $x_{\min}=\frac{1}{e}$ è punto di minimo relativo:

$$m\left(\frac{1}{e},\arctan\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\right)$$

Ora studiamo il comportamento della derivata in un intorno destro di $x=0$:

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=-\infty$$

Cioè la curva $y=f(x)$ "parte" dal punto $x=0$ con tangente verticale orientata verso l'alto.

Concavità e punti di flesso

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x)=0\Longleftrightarrow x=\alpha\simeq 1.3785$$

Segno:

$$f''(x)>0\Longleftrightarrow x\in(0,\alpha)$$

donde il grafico volge la concavità verso l'alto in $(0,\alpha)$, mentre in $(\alpha,+\infty)$ volge la concavità verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato nelle figure (1)

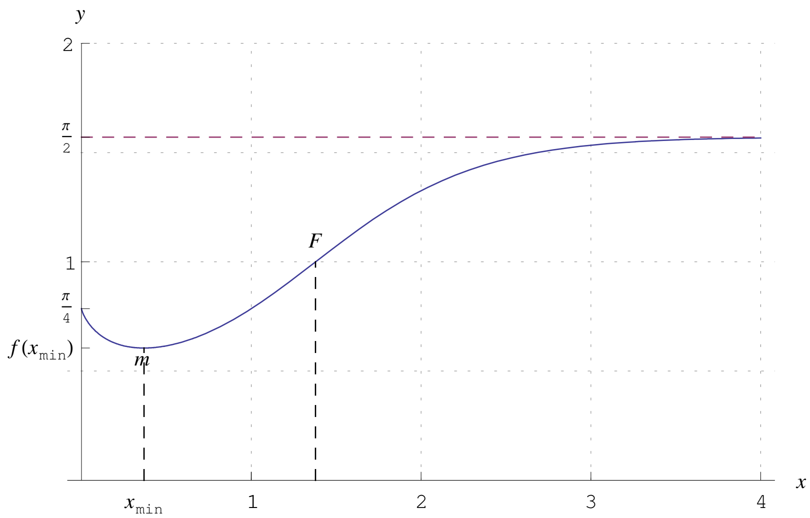

Figure 1: Grafico della funzione $f\,(x) = \arctan x^x$