

Esercizio 779
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione

$$f(x) = (2x - 1) \ln |2x - 1| + 2x \ln x - 4x + 4 \quad (1)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Deve essere:

$$\begin{cases} |2x - 1| \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$X = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Conviene esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} (2x - 1) \ln(1 - 2x) + 2x \ln x - 4x + 4, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ (2x - 1) \ln(2x - 1) + 2x \ln x - 4x + 4, & x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{cases} \quad (2)$$

Intersezioni con gli assi

Tralasciamo l'eventuale intersezione con l'asse x .

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.

Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(2x - 1) \ln(1 - 2x) + 2x \ln x - 4x + 4] \\ &= -1 \cdot \ln 1 + 2 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x}_{=0} + 4 = 4, \end{aligned}$$

quindi il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \underbrace{[(2x - 1) \ln(2x - 1)]}_{=l} + 2 - \ln 2$$

Calcoliamo:

$$l = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [(2x - 1) \ln |2x - 1|],$$

eseguendo il cambio di variabile:

$$t = 2x - 1$$

Quindi:

$$l = \lim_{x \rightarrow 0^+} t \ln t = \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = 0, \quad (3)$$

giacchè $\ln t$ è, per $x \rightarrow 0^+$, un infinito di ordine infinitamente piccolo. Il risultato (3) implica:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = 2 - \ln 2$$

Passiamo all'altro limite:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \underbrace{[(2x - 1) \ln(1 - 2x)]}_{=l'} + 2 - \ln 2$$

Calcoliamo:

$$l' = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} (2x - 1) \ln(1 - 2x) = 0,$$

procedendo come sopra tramite cambio di variabile

$$t' = 1 - 2x$$

Si conclude che:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 2 - \ln 2$$

Cioè il punto $x = \frac{1}{2}$ è un punto di discontinuità eliminabile.

Comportamento all'infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - 1) \ln(2x - 1) + 2x \ln x - 4x + 4] = \infty - \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{2x - 1}{x} \ln(2x - 1) + 2 \ln x - 4 + \frac{4}{x} \right] \\ &= (+\infty) [1 \cdot (+\infty) + (+\infty) - 4 + 0] = +\infty \end{aligned}$$

Eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x - 1}{x} \ln(2x - 1) + 2 \ln x - 4 + \frac{4}{x} \right] = +\infty,$$

per cui non esiste asintoto obliquo.

Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} 2[\ln(2x-1) + \ln x], & x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \\ 2[\ln(1-2x) + \ln x], & x \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (4)$$

$$f''(x) = 2 \frac{1-4x}{x-2x^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Per $x \in (0, \frac{1}{2})$ determiniamo gli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \iff \ln(x - 2x^2) = 0 \iff -2x^2 + x - 1 = 0$$

Ma $-2x^2 + x - 1 = 0$ è priva di soluzioni nel campo reale, per cui $f'(x) \neq 0$. In particolare per $x \in (0, \frac{1}{2})$ è $f'(x) < 0$, per cui la funzione è ivi strettamente decrescente. Per $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$:

$$f'(x) = 2 \ln [x(2x-1)] = 2 \ln (2x^2 - x)$$

Determiniamo gli zeri:

$$f'(x) = 0 \iff 2x^2 - x - 1 = 0 \iff_{x > \frac{1}{2}} x = 1$$

Segno di f'

$$f'(x) > 0 \iff_{x > \frac{1}{2}} x > 1,$$

donde per $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $(1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(\frac{1}{2}, 1)$. Il punto $x = 1$ è punto di minimo relativo:

$$m(1, 0)$$

Comportamento della derivata intorno alle discontinuità eliminabili.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f'(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [\ln(2x-1) + \ln x] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f'(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} [\ln(1-2x) + \ln x] = -\infty$$

Ciò implica:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\infty$$

Pertanto $P(\frac{1}{2}, 2 - \ln 2)$ è un punto cuspidale.

Passiamo a $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(1-2x) + \ln x] = -\infty$$

La curva $y = f(x)$ “parte” dal punto $x = 0$ con tangente verticale orientata verso il basso.

Concavità e punti di flesso

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = \frac{1}{4}$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se e solo se $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Viceversa, per $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ il grafico volge la concavità verso il basso. Il punto $x = \frac{1}{4}$ è di flesso:

$$F\left(\frac{1}{4}, 3 - \ln \sqrt{2}\right)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato in figura (1).

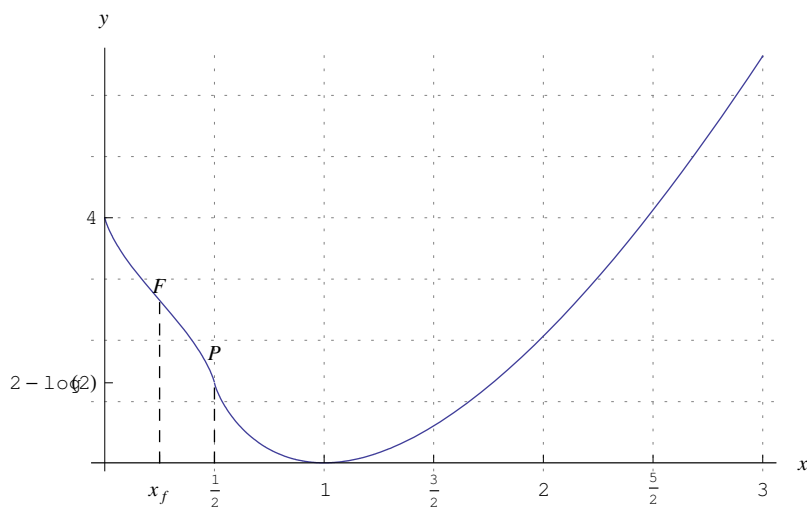


Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = (2x - 1) \ln |2x - 1| + 2x \ln x - 4x + 4$