Esercizio 775
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(e^x - e^{-x}\right) \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per $x \in \mathbb{R} \mid e^x - e^{-x} > 0 \iff x > 0$, quindi:

$$X = (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff e^x - e^{-x} - 1 = 0 \iff \frac{e^{2x} - e^x - 1}{e^x} = 0 \\ &\iff e^{2x} - e^x - 1 = 0 \iff e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \iff x = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &\implies A\left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right) \in \gamma \cap x \end{aligned}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno

$$f(x) > 0 \iff e^{2x} - e^x - 1 > 0 \iff x \in \left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

Quindi per $x \in \left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ γ giace nel semipiano $y \geq 0$, mentre per $x \in \left(0, \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale a destra.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Ricerca degli asintoti obliqui

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = 1 \\
n &= \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \infty-\infty = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-e^{-x}\right)-\ln e^x\right] \\
&= \ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x} = \ln 1 = 0
\end{aligned}
$$

Perciò la retta di equazione:

$$y = x$$

è asintoto obliquo a destra.
Derivate

$$f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \tag{2}$$

$$f''(x) = -\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2} \tag{3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X,\ f'(x) > 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente.
Concavità e punti di flesso
Risulta:

$$\forall x \in X,\ f''(x) < 0$$

Il grafico volge sempre la concavità verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (1).

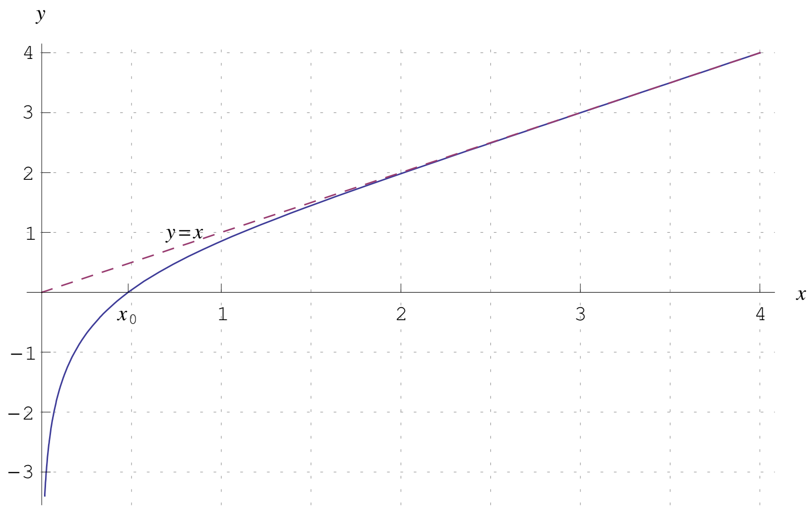

Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = \ln\left(e^{x} - e^{-x}\right)$