

Esercizio 773
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione

$$f(x) = 2 \sinh \ln |\ln x| + 2(1 - \ln x) [1 + \operatorname{sign}(\ln x)], \quad (1)$$

essendo

$$\operatorname{sign}(t) = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Esplicitiamo $\operatorname{sign}(\ln x)$

$$\operatorname{sign}(\ln x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, +\infty) \\ -1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Quindi:

$$1 + \operatorname{sign}(\ln x) = \begin{cases} 2, & x \in (1, +\infty) \\ 0, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Esplicitiamo ora $\sinh \ln |\ln x|$. A tale scopo poniamo $t = |\ln x|$:

$$\sinh \ln t = \frac{1}{2} (e^{\ln t} - e^{-\ln t}) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

Quindi:

$$\sinh \ln |\ln x| = \frac{\ln^2 x - 1}{2|\ln x|} = \begin{cases} \frac{1 - \ln^2 x}{2\ln x}, & x \in (0, 1) \\ \frac{1 - \ln^2 x}{2\ln x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Perciò la (1) si scrive:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \ln^2 x}{\ln x}, & x \in (0, 1) \\ \frac{-3\ln^2 x + 4\ln x - 1}{\ln x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

La funzione è definita in $X = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

Per $x \in (0, 1)$

$$f(x) = 0 \underset{x \in (0,1)}{\iff} \ln x = \pm 1 \iff x = \frac{1}{e}$$

Quindi

$$A\left(\frac{1}{e}, 0\right) \in \gamma \cap x, \quad (2)$$

essendo γ il diagramma cartesiano della funzione.

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Per $x \in (1, +\infty)$

$$f(x) = 0 \underset{x < 1}{\iff} 3 \ln^2 x - 4 \ln x + 1 = 0 \iff x = \sqrt[3]{e}, e$$

da ciò segue:

$$B(\sqrt[3]{e}, 0), C(e, 0) \in \gamma \cap x \quad (3)$$

Segno

Per $x \in (0, 1)$

$$f(x) > 0 \underset{x \in (0,1)}{\iff} \frac{1 - \ln^2 x}{\ln x} > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$$

Quindi in $(0, 1)$ il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, mentre per $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ giace nel semipiano $y < 0$.

Per $x \in (1, +\infty)$

$$f(x) > 0 \underset{x > 1}{\iff} 3 \ln^2 x - 4 \ln x + 1 < 0 \iff \ln x > \frac{1}{3}, \ln x < 1 \iff x \in (\sqrt[3]{e}, e)$$

Quindi in $(1, +\infty)$ il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\sqrt[3]{e}, e)$, mentre per $x \in (1, \sqrt[3]{e}) \cup (e, +\infty)$ giace nel semipiano $y < 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln^2 x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \left(\frac{1}{\ln^2 x} - 1 \right) = (-\infty) \cdot (-1) = +\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale a destra.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \ln^2 x}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3 \ln^2 x + 4 \ln x - 1}{\ln x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

Cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

Perciò il punto $x = 1$ è una singolarità, e la retta $x = 1$ è asintoto verticale sia a sinistra che a destra.

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 \ln^2 x + 4 \ln x - 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x \left(3 - \frac{4}{\ln x} + \frac{1}{\ln x} \right) = -\infty$$

Il grafico è privo di asintoti obliqui a causa della divergenza logaritmica:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x \left(3 - \frac{4}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}\right)}{x} = -3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Derivate

Per $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-2\ln x}{x} \cdot \ln x + \frac{1}{x} (\ln^2 x - 1)}{\ln^2 x} \\ &= -\frac{1 + \ln^2 x}{x \ln^2 x} \end{aligned}$$

Per $x \in (1, +\infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(-6\frac{\ln x}{x} + \frac{4}{x}\right) \ln x - \frac{1}{x} (-3\ln^2 x + 4\ln x - 1)}{\ln^2 x} \\ &= \frac{1 - 3\ln^2 x}{x \ln^2 x} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1+\ln^2 x}{x \ln^2 x}, & x \in (0, 1) \\ \frac{1-3\ln^2 x}{x \ln^2 x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases} \quad (4)$$

Passiamo alla derivata seconda. Calcoliamo a parte:

$$\frac{d}{dx} (x \ln^2 x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2 \ln x$$

Per $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\frac{-2\ln x}{x} \cdot x \ln^2 x - (1 + \ln^2 x) \cdot (\ln^2 x + 2 \ln x)}{x^2 \ln^4 x} \\ &= \frac{\ln^3 x + \ln x + 2}{x^2 \ln^3 x} \end{aligned}$$

Per $x \in (1, +\infty)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-6\frac{\ln x}{x} \cdot x \ln^2 x + (1 + 3 \ln x) (\ln^2 x + \ln x)}{x^2 \ln^4 x} \\ &= \frac{3 \ln^3 x - \ln x - 2}{x^2 \ln^3 x} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{\ln^3 x + \ln x + 2}{x^2 \ln^3 x}, & x \in (0, 1) \\ \frac{3 \ln^3 x - \ln x - 2}{x^2 \ln^3 x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases} \quad (5)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Per $x \in (0, 1)$

$$\forall x \in (0, 1), \quad f'(x) < 0,$$

donde la funzione è strettamente decrescente in $(0, 1)$.

Per $x \in (1, +\infty)$ determiniamo gli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \iff_{x>1} \ln x = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff x = e^{1/\sqrt{3}}$$

Segno:

$$f'(x) > 0 \iff_{x>1} 3 \ln^2 x - 1 < 0 \iff x \in \left(1, e^{1/\sqrt{3}}\right)$$

Quindi per $x \in (1, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $\left(1, e^{1/\sqrt{3}}\right)$ ed è strettamente decrescente in $\left(e^{1/\sqrt{3}}, +\infty\right)$. Ciò implica che $x = e^{1/\sqrt{3}}$ è punto di massimo relativo:

$$M\left(e^{1/\sqrt{3}}, 4 - 2\sqrt{3}\right)$$

Concavità e punti di flesso

Per $x \in (0, 1)$ determiniamo gli zeri della derivata seconda

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff_{x \in (0,1)} \ln^3 x + \ln x + 2 = 0 \iff (\ln^2 x - \ln x + 2)(\ln x + 1) = 0 \\ &\iff \ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \iff_{x \in (0,1)} \frac{\ln^3 x + \ln x + 2}{\ln x} > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$$

donde per $x \in (0, 1)$ il grafico volge la concavità verso l'alto in $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, mentre in $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ volge la concavità verso il basso. Il punto $x = \frac{1}{e}$ è punto di flesso, onde ridefiniamo il punto (2):

$$F\left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

Per $x \in (1, +\infty)$ determiniamo gli zeri della derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff_{x>1} 3 \ln^3 x - \ln x - 2 = 0 \iff (3 \ln^2 x + 3 \ln x + 2)(\ln x - 1) = 0 \\ &\iff \ln x = 1 \iff x = e \end{aligned}$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \iff_{x>1} \ln x - 1 > 0 \iff x \in (e, +\infty)$$

Quindi per $x \in (1, +\infty)$ il grafico volge la concavità verso l'alto in $(e, +\infty)$, mentre volge la concavità verso il basso in $(1, e)$.
 il punto $x = e$ è punto di flesso, onde ridefiniamo il punto C (eq. 3).

$$F'(e, 0)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato in figura (1).

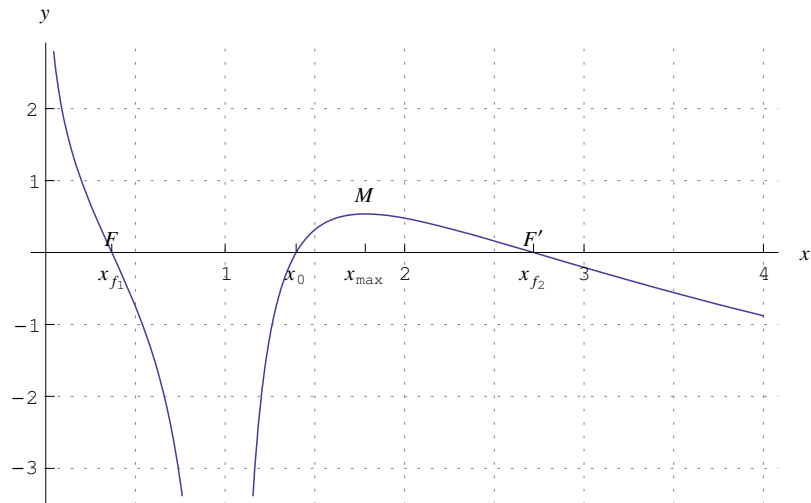


Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = 2 \sinh \ln |\ln x| + 2(1 - \ln x)[1 + \text{sign}(\ln x)]$