Esercizio 763
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = 3^{-\arcsin x} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione esponenziale è definita su tutto $\mathbb{R}$, per cui l'insieme di definizione della funzione proposta è quello di $\arcsin x$, cioè:

$$X = [-1, 1]$$

Intersezioni con gli assi
Il grafico è privo di intersezioni con l'asse x, poichè

$$\forall x \in X,\ f(x) > 0 \tag{2}$$

Intersezione con l'asse y:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow (0,1) \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno
Per la (2) il grafico si dispone nel semipiano $y > 0$.
Simmetrie
La funzione non ha parità definita, perciò il grafico è privo di simmetria (rispetto all'asse y o rispetto all'origine).
Comportamento agli estremi
Gli estremi del campo di esistenza appartengono a X, risultando:

$$f(-1) = 3^{\pi/2}, f(1) = 3^{-\pi/2}$$

Derivate
Calcoliamo la derivata prima

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3^{-\arcsin x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{d}{dx}(-\arcsin x) \\ &= -\frac{3^{-\arcsin x} \ln 3}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{\ln 3 \cdot f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\ln 3 \frac{f'(x)\sqrt{1-x^2} - f(x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= -\ln 3 \frac{3^{-\arcsin x} \ln 3 \cdot \sqrt{1-x^2} + 3^{-\arcsin x} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \\ &= \ln 3 \cdot f(x) \frac{\sqrt{1-x^2} \ln 3 - x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\ln 3 \cdot f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ f''(x) &= \ln 3 \cdot f(x) \frac{\sqrt{1-x^2} \ln 3 - x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \end{aligned} \tag{3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \ \ f'(x) < 0$$

Si conclude che la funzione è strettamente decrescente. Si osservi che la funzione non è derivabile negli estremi del campo di esistenza. Più precisamente ha ivi derivata infinita, risultando:

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty \tag{4}$$

Le (4) hanno la seguente interpretazione geometrica: la curva $\gamma) y = f(x)$ "parte" dal punto $x = -1$ con tangente verticale orientata verso il basso, e "arriva" in $x = 1$ conservando l'orientamento della retta tangente.
Concavità e punti di flesso
Calcoliamo gli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} \ln 3 - x = 0$$

Tale equazione irrazionale ha l'unica radice:

$$x_f = \frac{\ln 3}{\sqrt{\ln^2 3 + 1}}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} \ln 3 - x > 0 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} > \frac{x}{\ln 3} \end{aligned}$$

Applichiamo il procedimento standard di ricerca delle soluzioni di una disequazione irrazionale.

1. $x \geq 0$

$$\begin{cases} 1 - x^2 > \frac{x^2}{\ln^2 3} \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x \in S_1 = [0, x_f)$$

2. $x < 0$

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \iff x \in S_2 = [-1, 0)$$

Pertanto la disequazione $\sqrt{1-x^2} > \frac{x}{\ln 3}$ è verificata per ogni $x \in S = S_1 \cup S_2 = [-1, x_f)$. Ciò implica che il grafico volge la concavità verso l'alto per $x \in S$, mentre per $x \in (x_f, 1]$ volge la concavità verso il basso. Quindi x_f è punto di flesso.

$$F\left(\frac{\ln 3}{\sqrt{\ln^2 3 + 1}}, 3^{-\arcsin \frac{\ln 3}{\sqrt{\ln^2 3+1}}}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (1).

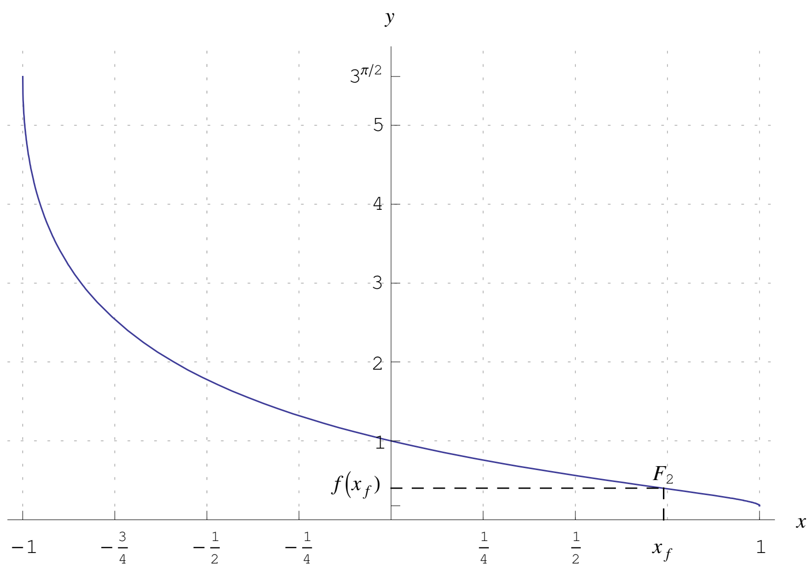

Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = 3^{-\arcsin x}$