Esercizio 759
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\left|x^2-1\right|} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Esplicitiamo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2-1}, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ e^{-\left(x^2-1\right)}, & x \in (-1, 1) \end{cases} \tag{2}$$

Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X, \ \ f(x) > 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x, y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno
Dal risultato precedente segue che γ giace nel semipiano $y > 0$.
Simmetrie
La funzione è pari: $f(x) = -f(-x)$, quindi γ è simmetrico rispetto all'asse y.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi la funzione diverge positivamente per $x \to \pm\infty$. La divergenza esponenziale implica l'inesistenza di asintoti obliqui.
Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2-1}, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -2xe^{x^2-1}, & x \in (-1, 1) \end{cases} \tag{3}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \left(4x^2+2\right) e^{x^2-1}, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 2\left(2x^2-1\right) e^{x^2-1}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ la derivata prima non si annulla mai, ed è maggiore di zero per $x > 1$, segue che è strettamente crescente in $(1, +\infty)$, e procedendo per simmetria rispetto all'asse y (la funzione è pari), risulta decrescente per $x < -1$.
Per $x \in (-1, 1)$ la derivata si annulla in $x = 0$ ed è positiva in $(-1, 0)$. Segue che è crescente in $(-1, 0)$, decrescente in $(0, 1)$, perciò $x = 0$ è punto di massimo relativo: $M(0, e)$.

I punto $(\pm 1, 1)$ sono punti angolosi, poichè:

$$f'_-(-1) = 2, f'_+(-1) = -2$$
$$f'_-(1) = -2, f'_+(1) = 2$$

Concavità e punti di flesso
Per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $f''(x) > 0$, per cui γ volge ivi la concavità verso l'alto.
Per $x \in (-1, 1)$,

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \; x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

Perciò per $x \in (-1, 1)$ il grafico è concavo in $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. I punti $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono di flesso:

$$F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$
$$F_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (1).

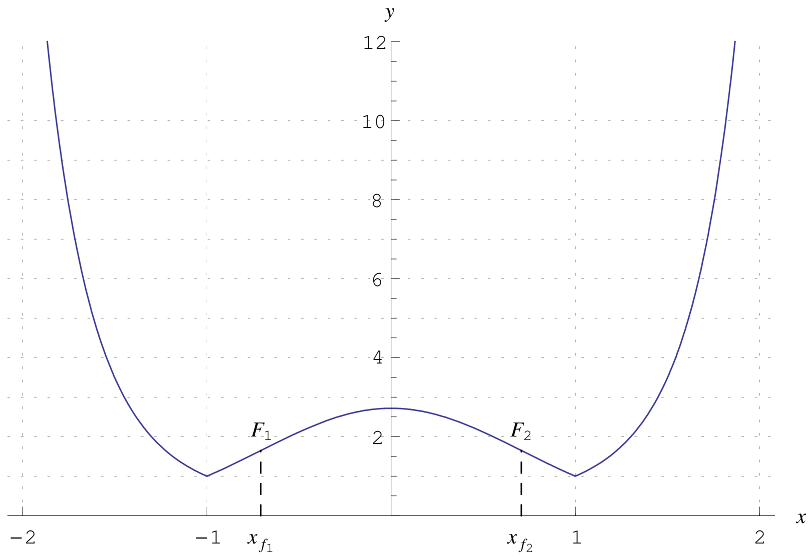

Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = e^{\left|x^2-1\right|}$