Esercizio 1466
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Discutere il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ -7x_1 + 7x_2 - 14x_3 + 4x_4 = \lambda \end{cases} \tag{1}$$

***

Soluzione
Il sistema assegnato ha $m = 3$ equazioni e $n = 4$ incognite. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ -7 & 7 & -14 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti e dei termini noti è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 2 & 8 \\ -7 & 7 & -14 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$$

Un calcolo diretto mostra che i minori del terzo ordine di A sono nulli, mentre ad esempio, il minore del secondo ordine:

$$\det C \overset{def}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

per cui il rango del sistema è $p = 2$, e assumiamo $\det C$ come determinante fondamentale del sistema.
I determinanti associati al determinante fondamentale sono:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r \end{vmatrix}, \text{ con } r = p+1, p+2, ..., m$$

Nel caso in esame è $r = 3$:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \\ -7 & 7 & \lambda \end{vmatrix} = -7\lambda - 70$$

Per il teorema di Rouchè:

$$\text{il sistema è compatibile)} \Longleftrightarrow \Delta_3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -10$$

Ed è quindi incompatibile per ogni $\lambda \neq -10$.
Per $\lambda = -10$ otteniamo il sistema equivalent, ottenuto conservando solo le prime p equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases}$$

che ammette ∞^2 soluzioni. Infatti poniamo:

$$x_3 = \mu, \; x_4 = \nu$$

Quindi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 + \mu - 5\nu \\ 3x_1 - x_2 = 8 - 4\mu - 2\nu \end{cases}$$

Risolvendo con la regola di Cramer:

$$x_1 = \frac{23}{7} - \frac{9}{7}\nu - \mu, \quad x_2 = \mu - \frac{13}{7}\nu + \frac{13}{7}$$