Esercizio 1464
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnato il sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3)\,,\ \mathbf{v}_1 = (2, 3, 0, -1)\,,\ \mathbf{v}_1 = (2, -1, 2, 1)$$

provare che $\mathbf{v} \in A[\Sigma]$, essendo $\mathbf{v} = (3, 9, -4, -2)$.

***

Soluzione
Risulta:

$$\mathbf{v} \in A[\Sigma] \Longleftrightarrow \left(\exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0) : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{v}_i\right) \tag{1}$$

La (1) si scrive:

$$\lambda_1 (1, -2, 0, 3) + \lambda_2 (2, 3, 0, -1) + \lambda_3 (2, -1, 2, 1) = (3, 9, -4, -2)$$

cioè:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 3 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 9 \\ 0 + 0 + 2\lambda_3 &= -4 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= -2 \end{aligned} \tag{2}$$

La caratteristica del sistema lineare (2) è $p = 3$, per cui esso è equivalente a:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 3 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 9 \\ 0 + 0 + 2\lambda_3 &= -4, \end{aligned}$$

che ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 3, -2)$. Si conclude che $\mathbf{v} \in A[\Sigma]$, poichè $\mathbf{v}$ si esprime come combinazione lineare dei vettori di Σ:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$$