Esercizio 1462
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ (insieme delle matrici quadrate di ordine n). Dire quale tra i seguenti suoi sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ A \text{ è simmetrica}\} \\ H'_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ AX = XA\}, \text{ con } X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) \\ J_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ \det A = 0 \ \} \\ J'_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \left\{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ A^2 = 0 \ \right\} \end{aligned}$$

***

Soluzione

$\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $A + B = (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}) =$ (A,B simmetriche) $= (c_{ji} = a_{ji} + b_{ji})$, quindi:

$$\forall A, B \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n), \ (A + B) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{1}$$

Inoltre: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A = (a_{ij}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $(\lambda A) = (\lambda a_{ij}) = (\lambda a_{ji})$, perciò:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n), \ (\lambda A) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{2}$$

Le (1)-(2) implicano che $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $\mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è l'insieme delle matrici di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ che commutano con un'assegnata matrice $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
Risulta: $\forall A, B \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $(A + B)X = AX + BX = XA + XB = X(A + B)$, donde:

$$\forall A, B \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n), (A + B)X = X(A + B) \Longrightarrow (A + B) \in \forall A, B \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{3}$$

Inoltre: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $(\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda(XA) = (\lambda X)A = X(\lambda A)$, donde:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n), \ (\lambda A)X = X(\lambda A) \Longrightarrow (\lambda A) \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{4}$$

Le (3)-(3) implicano che $\mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $J_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è l'insieme delle matici di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ a determinante nullo. Risulta:

$$(\exists A, B \in J_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ \det(A + B) \neq \det A + \det B = 0) \Longrightarrow (A + B) \notin J_{\mathbb{R}}(n \times n),$$

donde $J_{\mathbb{R}}(n \times n)$ **non** è un sottospazio di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $J'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è l'insieme delle matici di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ idempotenti. Risulta:

$$\forall A, B \in J'_{\mathbb{R}}(n \times n), \ \ (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Evidentemente:

$$\exists A, B \in J'_{\mathbb{R}}(n \times n), \ \ (A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA \neq (A + B)^2 \Longrightarrow (A + B) \notin J'_{\mathbb{R}}(n \times n),$$

donde $J'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ **non** è un sottospazio di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.