**Esercizio 1428**
**(File scaricato da http://www.extrabyte.info)**

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y,$$

nel dominio: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq -3,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$.

***

**Soluzione**
Il dominio $A$ è limitato e $f$ è ivi continua. Quindi per il teorema di Weierstrass, la funzione è ivi dotata di minimo e massimo assoluti.
I punti di estremo assoluto appertengono all'insieme $J_1 \cup J_2 \cup \partial A$, essendo:

$$J_1 = \left\{P \in \mathring{A} \mid f \text{ non è parzialmente derivabile}\right\}$$
$$J_2 = \left\{P \in \mathring{A} \mid \nabla f \ = \mathbf{0}\right\},$$

Osserviamo che $J_2 = \emptyset$, per cui la ricerca va ristretta in $J_2 \cup \partial A$. L'insieme $J_2$ è costituito dai punti critici interni ad $A$, per cui risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases},$$

cioè:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Quindi abbiamo un solo punto critico: $P_1(-1,-1) \in \mathring{A}$, onde $J_2 = \{P_0\}$.
La matrice hessiana è:

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_1) & f_{xy}(P_1) \\ f_{yx}(P_1) & f_{yy}(P_1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

ed è definita positiva, per cui $P_1$ è punto di minimo relativo. Risulta: $f(P_1) = -1$.
Ora dobbiamo ricercare gli estremi su $\partial A$:

$$\partial A = \bigcup_{k=1}^{3} C_k,$$

essendo:

$$
\begin{aligned}
&C_1 : x = t,\ y = 0, \quad t \in [-3, 0] \\
&C_2 : x = t,\ y = -t - 3, \quad t \in [-3, 0] \\
&C_1 : x = 0,\ y = t, \quad t \in [-3, 0]
\end{aligned}
$$

Su $C_k$ restano definite le funzioni composte:

$$
\begin{aligned}
&g_1(t) = t^2 + t, \qquad t \in [-3, 0] \\
&g_2(t) = 3t^2 + 9t + 6, \qquad t \in [-3, 0] \\
&g_3(t) = g_1(t)
\end{aligned}
$$

Dobbiamo quindi trovare gli estremi assoluti delle $g_k(t)$. Iniziamo con la $g_1(t)$:

$$
g_1'(t) = 2t + 1,
$$

che si annulla in $t = -\frac{1}{2}$. Dallo studio del segno della derivata segue che si tratta di un punto di minimo relativo, risultando $x\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Abbiamo perciò il punto di minimo relativo proprio $P_2\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, e il valore assunto dalla funzione è $f(P_2) = -\frac{1}{4}$. Osserviamo poi che $g_1(t)$ ha un massimo assoluto in $t = -3$, con $g_1(-3) = 6$. Perciò abbiamo un punto di massimo $P_3(-3, 0)$ e il valore assunto dalla funzione è $f(P_3) = 6$.
Passiamo alla funzione $g_2(t)$. Qui abbiamo un punto di minimo relativo $t = -3/2$ e $g_2\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$. Troviamo poi un massimo in $t = -3$, che è lo stesso di quello della funzione $g_1(t)$. A $t = -3/2$ corrispondono $x = y = -\frac{3}{2}$, quindi il punto di minimo relativo $P_4\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ con $f(P_4) = -\frac{3}{4}$.
La funzione $g_3$ ovviamente ha gli stessi estremi di $g_1$. Qui però è $x = 0$ e $y = t$, per cui il minimo a $t = -\frac{1}{2}$ corrisponde a $P_5\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, e il massimo a $t = -3$ corrisponde a $P_6(0, -3)$. Inoltre: $f(P_5) = -\frac{1}{4}$, $f(P_6) = 6$.
Riassumendo:

| Punti estremanti | Valore assunto dalla funzione |
|---|---|
| $P_1(-1, 1)$ punto di minimo | $f(P_1) = -1$ |
| $P_2\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ punto di minimo | $f(P_1) = -\frac{1}{4}$ |
| $P_3(-3, 0)$ punto di massimo | $f(P_3) = 6$ |
| $P_4\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ punto di minimo | $f(P_4) = -\frac{3}{4}$ |
| $P_5(-1, 1)$ punto di minimo | $f(P_5) = -\frac{1}{4}$ |
| $P_6(0, -3)$ punto di minimo | $f(P_1) = 6$ |

Dalla tabella vediamo che il minimo assoluto è $z_{\min} = -1$ ed è assunto in $P_1$, e il massimo assoluto è $z_{\max} = 6$.