

Esercizio 1427
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Abbiamo visto (<http://www.tinyurl.com/punto-critico>) che il criterio del solo punto critico è spesso violato dalle funzioni di due variabili.

Mostriamo che il polinomio di Calvert e Vamanamurthy :

$$f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^5,$$

è un esempio di violazione di tale criterio.

Soluzione

Determiniamo innanzitutto gli estremi relativi. Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases},$$

cioè:

$$\begin{cases} x(1 + y)^3 = 0 \\ 3x^2(1 + y)^2 + 2y = 0 \end{cases},$$

la cui soluzione è: $x = y = 0$. Quindi abbiamo un solo punto critico. Determiniamo ora le derivate seconde:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2(1 + y)^3, & f_{yy}(x, y) &= 6x(1 + y)^2 \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 6x(1 + y)^2 \end{aligned}$$

Nel punto critico:

$$\begin{aligned} f_{xx}(P_0) &= 2, & f_{xy}(P_0) &= 0 \\ f_{yx}(P_0) &= 0, & f_{yy}(P_0) &= 2 \end{aligned}$$

Quindi la matrice hessiana:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, quindi P_0 è un punto di minimo relativo proprio. Il valore del minimo è $f(P_0) = 0$. Ma è facile verificare che:

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < 0,$$

per cui la funzione è priva di minimo assoluto. Quindi pur avendo un minimo relativo senza ammettere altri estremanti, è priva di minimo assoluto, contrariamente a quanto previsto dal criterio del solo punto critico.