Esercizio 1418
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2 + 3x$$

***

Soluzione

Utilizzando una routine di Mathematica scaricabile dal link: `http://tinyurl.com/mathematica2` vediamo che l'unico punto critico è $P_0(0,0)$. Tuttavia l'hessiano è $H(P_0) = 0$, per cui non possiamo specificare nulla sulla natura del punto critico, se non esaminando il comportamento della funzione in un intorno di P_0 Per fare ciò è conveniente eseguire una traslazione di assi, attraverso la trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} \xi = x - 1 \\ \eta = y - 1 \end{cases},$$

cioè:

$$\begin{cases} x = \xi + 1 \\ y = \eta + 1 \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate la funzione è:

$$f(\xi,\eta) = \xi^3 - 3(\xi - \eta)$$

Ora il punto critico ha coordinate $\xi = 0$,$\eta = 0$, risultando inoltre $f(0,0) = 0$. I valori assunti dalla funzione lungo la retta $\xi = \eta$, sono:

$$f(\xi,\xi) = \xi^3,$$

cosicché:

$$\begin{aligned} f(\xi,\xi) - f(0,0) = \xi^3 > 0 \Longleftrightarrow \xi > 0 \\ f(\xi,\xi) - f(0,0) = \xi^3 < 0 \Longleftrightarrow \xi < 0 \end{aligned}$$

Da ciò vediamo che indicato con $I(P_0)$ un intorno di P_0, si ha:

$$\forall I(P_0), \exists P, P' \in I(P_0) - \{P_0\} \mid \begin{cases} f(P) > f(P_0) \\ f(P) < f(P_0) \end{cases},$$

per cui il punto critico P_0 non è punto di estremo relativo.