

Esercizio 1410
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

In un riferimento cartesiano $\mathcal{R} (Oxy)$ consideriamo il fascio individuato dalle rette seguenti:

$$\begin{aligned} r &: 2x + y - 17 = 0 \\ r' &: 3x - 7y + 34 = 0 \end{aligned}$$

In tale fascio determinare la retta per:

1. $P_0 (2, 3)$;
2. $Q_0 (3, 11)$

Soluzione

Scriviamo innanzitutto l'equazione del fascio proprio:

$$\lambda (2x + y - 17) + \lambda' (3x - 7y + 34) = 0, \quad (1)$$

che può essere scritta come:

$$(2\lambda + 3\lambda')x + (\lambda - 7\lambda')y + (-17\lambda + 34\lambda') = 0 \quad (2)$$

Come è noto, dei due parametri λ, λ' sono uno è indipendente, per cui la (2) (o la 1) descrivono le ∞^1 rette del fascio. Per selezionare quella passante per P_0 , occorre e basta sostituire le coordinate di tale punto in detta equazione, ottenendo:

$$(2\lambda + 3\lambda')2 + (\lambda - 7\lambda')3 + (-17\lambda + 34\lambda') = 0$$

ottenendo:

$$\lambda = \frac{19}{10}\lambda'$$

Sostituendo nella (2):

$$\frac{19}{10}\lambda' (2x + y - 17) + \lambda' (3x - 7y + 34) = 0$$

cioè:

$$4x - 3y + 1 = 0,$$

che è la retta r'

Per il secondo quesito dobbiamo procedere allo stesso modo, sostituendo cioè le coordinate di Q_0 nell'equazione (2):

$$(2\lambda + 3\lambda')3 + (\lambda - 7\lambda')11 + (-17\lambda + 34\lambda') = 0$$

da cui otteniamo $\lambda' = 0$. Si conclude che la retta del fascio passante per Q_0 è la retta r .

Si noti che se avessimo scritto l'equazione del fascio nella forma *non omogenea*:

$$k(2x + y - 17) + 3x - 7y + 34 = 0, \quad (3)$$

ottenuta ponendo

$$k = \frac{\lambda}{\lambda'}, \quad (4)$$

avremmo avuto:

$$k(2 \cdot 3 + 11 - 17) + 3 \cdot 3 - 7 \cdot 11 + 34 = 0,$$

cioè l'equazione assurda:

$$-34 = 0$$

L'assurdità di tale risultato deriva dal fatto che il coefficiente k è dato dalla (4), mentre la retta richiesta corrisponde al valore $\lambda' = 0$, il che a sua volta implica una divisione per zero per la determinazione del coefficiente k . In altri termini, l'equazione (3) rappresenta le rette del fascio, ad esclusione della retta $2x + y - 17 = 0$.