

Esercizio 1389
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Determinare i valori del parametro reale a tali che la funzione:

$$f(x, y) = e^{ay^2} \ln \left(1 + |x|^{a^2 + \frac{2}{3}} \right), \quad (1)$$

risulti parzialmente derivabile in $(0, 0)$.

Soluzione

Notiamo innanzitutto che la funzione è continua in $(0, 0)$. In particolare risulta: $f(0, 0) = 0$.
Calcoliamo:

$$f_y(x, y) = 2af(x, y),$$

per cui:

$$f_y(0, 0) = 0$$

Quindi la derivata rispetto a y esiste per ogni valore di a . Per il calcolo della derivate parziale $f_x(0, 0)$, conviene applicare direttamente la definizione:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{ay^2} \ln \left(1 + |\Delta x|^{a^2 + \frac{2}{3}} \right)}{\Delta x} \\ &= e^{ay^2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + |\Delta x|^{a^2 + \frac{2}{3}} \right)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Per eseguire il calcolo del limite, osserviamo che Δx compare come variabile muta, per cui possiamo indicarla con un qualunque simbolo, ad esempio x . Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + |x|^{a^2 + \frac{2}{3}} \right)}{x} = \frac{0}{0} \quad (2)$$

Per la presenza del valore assoluto, distinguiamo i due casi: $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + x^{a^2 + \frac{2}{3}} \right)}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \left(a^2 + \frac{2}{3} \right) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{a^2 - \frac{1}{3}}}{1 + x^{a^2 + \frac{2}{3}}}$$

Il limite a secondo membro esiste ed è diverso da $+\infty$ se e solo se $a^2 - \frac{1}{3} \geq 0$. Inoltre per $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, il limite è:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + x^{a^2 + \frac{2}{3}} \right)}{x} = a^2 + \frac{2}{3} = 1$$

In maniera analoga:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1 - x^{a^2 + \frac{2}{3}}\right)}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} -\left(a^2 + \frac{2}{3}\right) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{a^2 - \frac{1}{3}}}{1 - x^{a^2 + \frac{2}{3}}}$$

Il limite a secondo membro esiste ed è diverso da $-\infty$ se e solo se $a^2 - \frac{1}{3} \geq 0$. Inoltre per $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, il limite è

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln\left(1 + x^{a^2 + \frac{2}{3}}\right)}{x} = -\left(a^2 + \frac{2}{3}\right) = -1$$

Dobbiamo allora escludere i valori $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, in corrispondenza dei quali $\frac{\ln\left(1 + x^{a^2 + \frac{2}{3}}\right)}{x}$ ha una discontinuità di prima specie, per cui non esiste il limite (2).

Si conclude che $f_x(0, 0)$ esiste se e solo se $|a| > \frac{\sqrt{3}}{3}$, e per tali valori del parametro risulta $f_x(0, 0) = 0$.