Esercizio 1387
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Verificare se la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

ammette la derivata direzionale nell'origine.

***

Soluzione

Il campo di esistenza della funzione è $A = \mathbb{R}^2$

La funzione non è continua nell'origine, poichè non esiste il limite per $(x,y) \to (0,0)$. Infatti passando alle coordinate polari nel piano, vediamo che:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0}\left(1 + \frac{\cos\varphi}{r}\right),$$

cioè il valore assunto dal limite dipende dalla direzione secondo cui il punto (x,y) tende all'origine, per cui il limite non esiste. Da ciò segue che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$, pertanto non è detto che la derivata direzionale esista in tal punto. Per stabilirne l'esistenza dobbiamo applicare direttamente la definizione:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{(0,0)} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\lambda,\rho\mu) - f(0,0)}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\rho^2\overbrace{\left(\lambda^2+\mu^2\right)}^{=1} + \rho\lambda}{\rho\underbrace{\left(\lambda^2+\mu^2\right)}_{=1}} - 1\right] \\
&= \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho^2+\rho\lambda}{\rho^2} - 1\right) \\
&= \lim_{\rho\to 0}\frac{\lambda}{\rho^2}
\end{aligned}$$

Qui abbiamo tenuto conto della relazione $\lambda^2+\mu^2 = 1$, in quanto λ,μ sono le componenti di un versore. Abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\lambda}{\rho^2} = +\infty \Longleftrightarrow \lambda \neq 0$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\lambda}{\rho^2} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \lambda = 0$$

Riassumendo, la derivata direzionale nell'origine esiste se e solo se $\lambda = 0$. Quindi la derivata direzionale esiste solo nella direzione dell'asse y. Infatti:

$$\lambda = 0 \Longrightarrow \mathbf{n} = \pm\mathbf{j} \qquad \text{(asse } y\text{)}$$

Ma la derivata direzionale secondo le direzione dell'asse y altro non è che la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}$, risultando:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$