Esercizio 1382
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Sia $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione definta da:

$$f(x,y) = 3x^2y$$

Stabilire se f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, applicando direttamente la definizione.

***

Soluzione
La funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ se per ogni (x,y), risulta:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f - df}{\rho} = 0,$$

essendo $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.
Il differenziale è:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = 6xy\Delta x + 3x^2\Delta y$$

L'incremento:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= 3(x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - 3x^2y\\ &= 6xy\Delta x + 3x^2\Delta y + 3y(\Delta x)^2 + 6x\Delta x\Delta y + 3(\Delta x)^2\Delta y\\ &= df + 3y(\Delta x)^2 + 6x\Delta x\Delta y + 3(\Delta x)^2\Delta y\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f - df}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{3y(\Delta x)^2 + 6x\Delta x\Delta y + 3(\Delta x)^2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0,$$

da cui la differenziabilità della funzione.
Osserviamo che ciò poteva essere stabilito a priori, poiché è $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.