Esercizio 1373
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il limite:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{|x| \sqrt{|y|}}{x^4 + |y|}$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$f(x,y) = \frac{|x| \sqrt{|y|}}{x^4 + |y|}$$

Facciamo tendere il punto (x, y) all'origine $(0, 0)$ lungo la retta $y = mx$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, mx) &= \lim_{x \to 0} \frac{|x| \sqrt{|mx|}}{x^4 + |mx|} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{|x| \sqrt{|mx|}}{|x|^4 + |m| \, |x|} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|mx|}}{|x|^3 + |m|} = \frac{0}{0 + |m|} \\
&= \begin{cases} \frac{0}{0}, & \text{se } m = 0 \\ 0, & \text{se } m = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\forall m \neq 0, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, mx) = 0$$

Ora avviciniamo all'origine muovendoci lungo la parabola $y = x^2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f\left(x, x^2\right) &= \lim_{x \to 0} \frac{|x| \sqrt{x^2}}{x^4 + x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 + 1} = 1
\end{aligned}$$

Cioè il valore del limite dipende da come ci avviciniamo all'origine delle coordinate. Si conclude che il limite proposto non esiste.