Esercizio 1369
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare il laplaciano della funzione:

$$f\left(x,y\right)=\ln\left(\ln x^{y}\right)$$

***

Soluzione
Osserviamo innanzitutto che la funzione può essere riscritta nella forma più maneggevole:

$$f\left(x,y\right)=\ln\left(\ln x^{y}\right)=\ln\left(y\ln x\right)=\ln y+\ln\left(\ln x\right)$$

Il laplaciano è:

$$\nabla^{2}f=\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}f}{\partial y^{2}}$$

Calcoliamo quindi le derivate parziali seconde. Iniziamo ovviamente a calcolare quelle del prim'ordine:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x\ln x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y}$$

Quindi:

$$\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}}=-\frac{\ln x+1}{\left(x\ln x\right)^{2}}$$
$$\frac{\partial^{2}f}{\partial y^{2}}=-\frac{1}{y^{2}}$$

da cui il laplaciano:

$$\nabla^{2}f=-\frac{\ln x+1}{\left(x\ln x\right)^{2}}-\frac{1}{y^{2}}$$