

Esercizio 1367
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita da:

$$g(x, y) = f[\cos x + e^{(x+1)y}]$$

Calcolare $\nabla g(0, 0)$ sapendo che $f'(2) = \pi$.

Soluzione

Poniamo $t = \cos x + e^{(x+1)y}$, cosicché:

$$g(x, y) = f[t(x, y)]$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= f'(t) \frac{\partial t}{\partial x} \\ &= f'(t) [-\sin x + ye^{(x+1)y}] \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= f'(t) \frac{\partial t}{\partial y} \\ &= f'(t) [(x+1)e^{(x+1)y}] \end{aligned}$$

Per $t = 2$ è $x = y = 0$, quindi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(0,0)} &= f'(2) \underbrace{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{(0,0)}}_{=1} = \pi \\ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(0,0)} &= f'(2) \underbrace{\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{(0,0)}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Siamo ora in grado di calcolare $\nabla g(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \nabla g(0, 0) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(0,0)} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(0,0)} \mathbf{j} \\ &= \pi \mathbf{i} \end{aligned}$$