

Esercizio 1365
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Assegnata la funzione:

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2y^2),$$

calcolarne la derivata nella direzione del vettore $\mathbf{n} = \sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$ nel punto $A(1, 1)$.

Soluzione

Dobbiamo prima verificare se f è di classe C^1 .

Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2y}{1 + x^2y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2x}{1 + x^2y^2}\end{aligned}$$

Quindi le derivate sono continue in $(1, 1)$, al pari di f . Possiamo perciò determinare la derivata nella direzione assegnata:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{(1,1)} = \nabla f|_{(1,1)} \cdot \text{vers}\mathbf{n}$$

Il gradiente di f è:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{2y}{1 + x^2y^2}\mathbf{i} + \frac{2x}{1 + x^2y^2}\mathbf{j} \\ \implies \nabla f|_{(1,1)} &= \mathbf{i} + \mathbf{j}\end{aligned}$$

Il versore di \mathbf{n}

$$\text{vers}\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

La derivata richiesta è:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{(1,1)} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$$