Esercizio 1363
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y\left(x-1\right)\left(y-1\right)^3}{\left(x-1\right)^2+\left|y-1\right|}$$

è priva di estremi relativi

***

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y\left(x-1\right)\left(y-1\right)^3}{\left(x-1\right)^2+\left|y-1\right|}=\frac{0}{0}$$

Per rimuovere tale indeterminazione uitlizziamo un noto criterio di regolarità per confronto. A tale scopo osserviapmo che:

$$\begin{aligned}\left|\frac{y\left(x-1\right)\left(y-1\right)^3}{\left(x-1\right)^2+\left|y-1\right|}\right| &= \frac{\left|y\left(x-1\right)\left(y-1\right)^3\right|}{\left(x-1\right)^2+\left|y-1\right|}\\ &\leq \frac{\left|y\right|\left|\left(x-1\right)\right|\left|y-1\right|^3}{\left|y-1\right|}\\ &= \left|y\right|\left|\left(x-1\right)\right|\left(y-1\right)^3\end{aligned}$$

Cioè:

$$\forall\left(x,y\right)\in X,\quad f\left(x,y\right)\leq g\left(x,y\right),$$

essendo $f\left(x,y\right)=\frac{y(x-1)(y-1)^3}{(x-1)^2+|y-1|}$, $g\left(x,y\right)=\left|y\right|\left|\left(x-1\right)\right|\left(y-1\right)^3$, mentre X è il campo di esistenza di $f\left(x,y\right)$. Evidentemente:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} g\left(x,y\right)=0\Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f\left(x,y\right)=0$$