Esercizio 1357
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y, \tag{1}$$

nel campo illimitato $A = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$.

***

Soluzione
Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$f_x(x,y) = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}, \quad f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2} + 1$$

I punti estremali sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + 1 = 0 \end{cases},$$

che nel campo A ammette l'unica soluzione $(x,y) = (4,2)$, quindi abbiamo l'unico punto estremale $P_0(4,2)$.
Calcoliamo l'hessiano:

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{16}{x^3}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{2x}{y^3}, \quad f_{xy}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

Perciò:

$$H(x,y) = -\frac{1}{y^4} + \frac{32}{x^2 y^3}$$

Valutiamo l'hessiano nel punto estremale trovato:

$$\begin{cases} H(P_0) > 0 \\ f_{xx}(P_0) > 0 \end{cases} \Longrightarrow P_0 \text{ è punto di minimo relativo proprio}$$

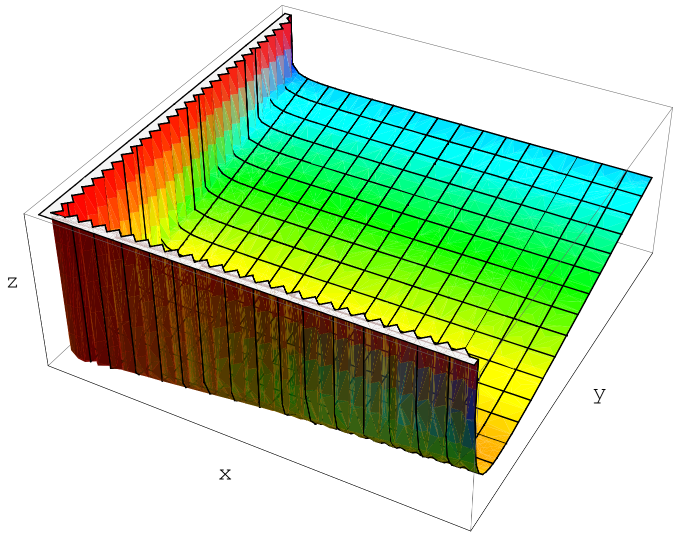

Figure 1: