Esercizio 1352
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right) \tag{1}$$

***

Soluzione
Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$f_x(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 + 2x - 2y^2\right), \quad f_y(x,y) = e^{x-y}\left(-x^2 + 2y^2 - 4y\right)$$

I punti estremali sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2) = 0 \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 2y^2 = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases},$$

le cui soluzioni sono $(0,0)$, $(-4,-2)$. Quindi abbiamo i punti estremali $P_0(0,0)$, $P_1(-4,-2)$.
Calcoliamo l'hessiano:

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

Le derivate parziali seconde sono:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 4x + 2\right) \\ f_{yy}(x,y) &= e^{x-y}\left(x^2 + 8y - 2y^2\right) \\ f_{xy}(x,y) &= e^{x-y}\left[2x + x^2 - 2y(y-2)\right] \end{aligned}$$

Nel punto P_0:

$$f_{xx}(P_0) = 2, \quad f_{yy}(P_0) = -4 \quad f_{xy}(P_0) = 0$$

Perciò:

$$H(P_0) = -8$$

ciò implica che P_0 non è punto di estremo relativo.
Nel punto P_1:

$$f_{xx}(P_1) = -\frac{6}{e^2}, \quad f_{yy}(P_1) = -\frac{12}{e^2} \quad f_{xy}(P_1) = \frac{8}{e^2}$$

Perciò:

$$H(P_0) = \frac{8}{e^4}$$

Pertanto:

$$\begin{cases} H(P_1) > 0 \\ f_{xx}(P_1) < 0 \end{cases} \Longrightarrow P_1 \text{ è punto di massimo relativo proprio}$$

Risulta:

$$f(P_0) = 108$$

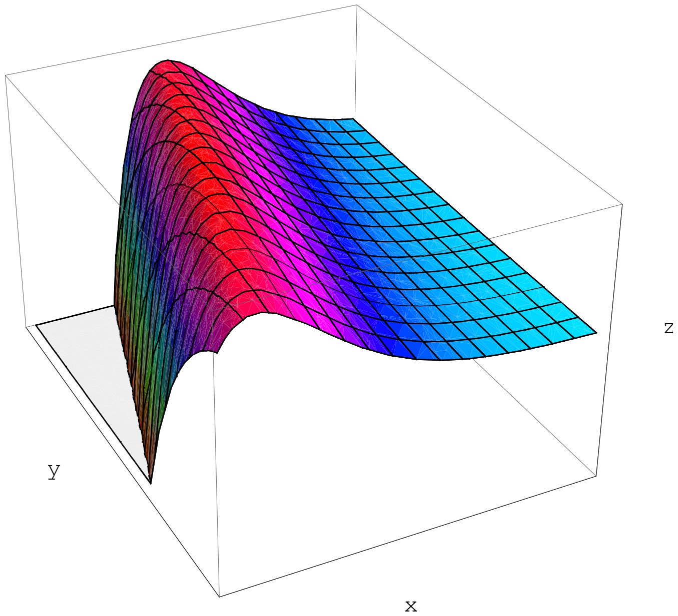

Figure 1: