Esercizio 1351
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x,y) = x^3 y^2 (6 - x - y), \tag{1}$$

nel campo $A = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$

***

Soluzione
Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$f_x(x,y) = x^2 y^2 (18 - 4x - 3y), \quad f_y(x,y) = x^3 y (12 - 2x - 3y)$$

I punti estremali sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 y^2 (18 - 4x - 3y) = 0 \\ x^3 y (12 - 2x - 3y) = 0 \end{cases}$$
$$\underset{(x,y)\in A}{\Longleftrightarrow}, \begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

che è un sistema di Cramer con soluzione $(x = 3, y = 2)$, per cui abbiamo un solo punto estremale $P_0(3,2)$.
Calcoliamo l'hessiano:

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

Le derivate parziali seconde sono:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 36xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 \\ &= -6xy^2 (2x + y - 6) \\ f_{yy}(x,y) &= 12x^3 - 2x^4 - 6x^3 y \\ &= -2x^3 (x + 3y - 6) \\ f_{xy}(x,y) &= 36x^2 y - 8x^3 y - 9x^2 y \\ &= x^2 y (36 - 8x - 9y) \end{aligned}$$

Nel punto P_0:

$$f_{xx}(P_0) = -144, \quad f_{yy}(P_0) = -162, \quad f_{xy}(P_0) = -108$$

Perciò:

$$H(P_0) = 11664$$

Pertanto:

$$\left\{\begin{array}{c} H\left(P_0\right) > 0 \\ f_{xx}\left(P_0\right) < 0 \end{array}\right. \Longrightarrow P_0 \text{ è punto di massimo relativo proprio}$$

Risulta:

$$f\left(P_0\right) = 108$$

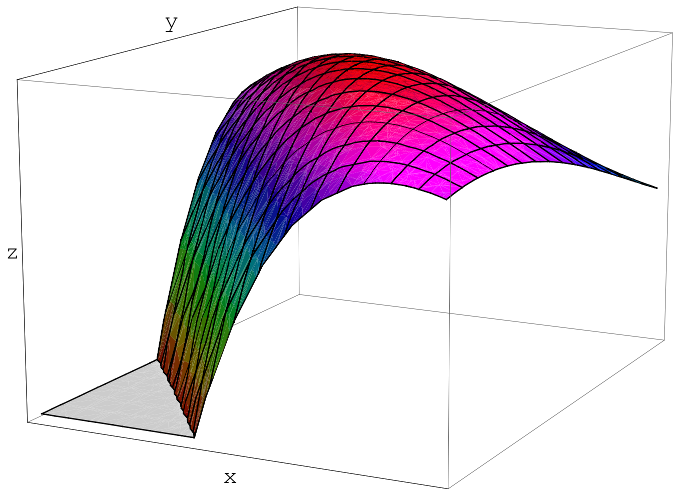

Figure 1: