

Esercizio 1346
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \quad (1)$$

Soluzione

Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$f_x(x, y) = -2xf(x, y), \quad f_y(x, y) = -2yf(x, y)$$

I punti estremali sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xf(x, y) = 0 \\ yf(x, y) = 0 \end{cases}$$
$$\xrightarrow[f(x,y) \neq 0]{\iff} (x, y) = (0, 0),$$

per cui abbiamo l'unico punto estremo: $P_0(0, 0)$.

Calcoliamo l'hessiano:

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx}(x, y) = -2f(x, y)(1 - 2x^2), \quad f_{yy}(x, y) = -2f(x, y)(1 - 2y^2), \quad f_{xy}(x, y) = 4xyf(x, y)$$

Perciò:

$$H(x, y) = 4[f(x, y)]^2(1 - 2x^2)(1 - 2y^2) + 4xyf(x, y)$$

Valutiamo l'hessiano nel punto estremo trovato:

$$\begin{cases} H(P_0) > 0 \\ f_{xx}(P_0) < 0 \end{cases} \implies P_0 \text{ è punto di massimo relativo proprio}$$

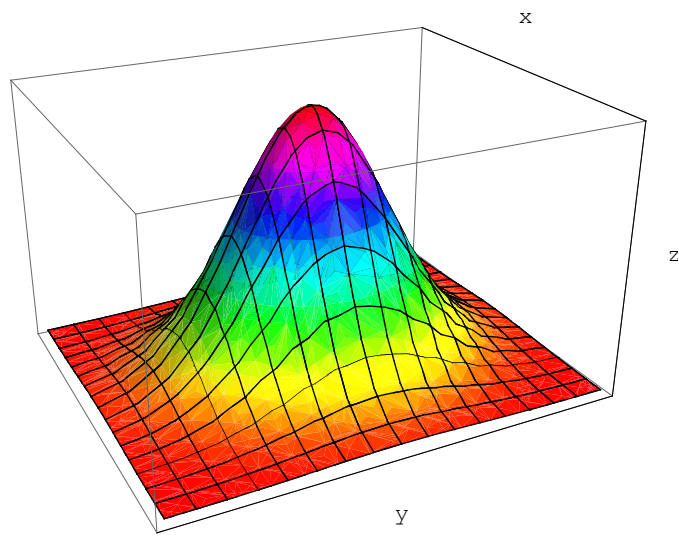


Figure 1: