Esercizio 1341
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \tag{1}$$

***

Soluzione
Risulta manifestamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$f_x(x,y) = 3\left(x^2 + 3y^2 - 5\right), \quad f_y(x,y) = 6(xy - 2)$$

I punti estremali sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases},$$

Ricavando y dalla seconda e sostituendo nella prima, si ottiene:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

le cui soluzioni sono: $x = \pm 1, \pm 2$. In definitiva troviamo i punti estremali:

$$P_1(-2,-1), \; P_2(-1,-2), \; P_3(2,1), \; P_4(1,2)$$

Calcoliamo l'hessiano:

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{yy}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = 6y$$

Perciò:

$$H(x,y) = 36\left(x^2 - y^2\right)$$

Valutiamo l'hessiano nei punti estremali trovati:

$$\begin{cases} H(P_1) > 0 \\ f_{xx}(P_1) < 0 \end{cases} \Longrightarrow P_1 \text{ è punto di massimo relativo proprio}$$

$$H(P_2) < 0 \Longrightarrow P_2 \text{ non è punto estremante}$$

$$\begin{cases} H(P_3) > 0 \\ f_{xx}(P_3) > 0 \end{cases} \Longrightarrow P_1 \text{ è punto di minimo relativo proprio}$$

$$H(P_4) < 0 \Longrightarrow P_4 \text{ non è punto estremante}$$

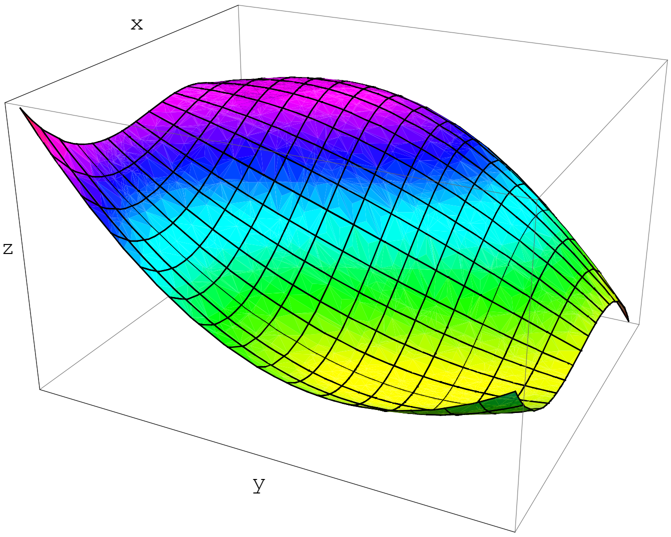

Figure 1: