Esercizio 1339
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy + y^2 \tag{1}$$

***

Soluzione
Risulta manifestamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$f_x(x,y) = 6x^2 + 6y, \quad f_y(x,y) = 6x + 2y$$

I punti estremali sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases},$$

da cui le soluzioni $(x,y) = (0,0), (3,-9)$, quindi i punti estremali $A(0,0)$, $B(3,-9)$.
Calcoliamo l'hessiano:

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx}(x,y) = 12x, \quad f_{yy}(x,y) = 6, \quad f_{xy}(x,y) = 6$$

Perciò:

$$H(x,y) = 12(2x-3)$$

Valutiamo l'hessiano nei punti estremali A e B:

$$H(A) = -36, \quad H(B) = 36$$

Si conclude che B è punto di minimo relativo proprio, mentre A non è di massimo, nè di minimo relativo.

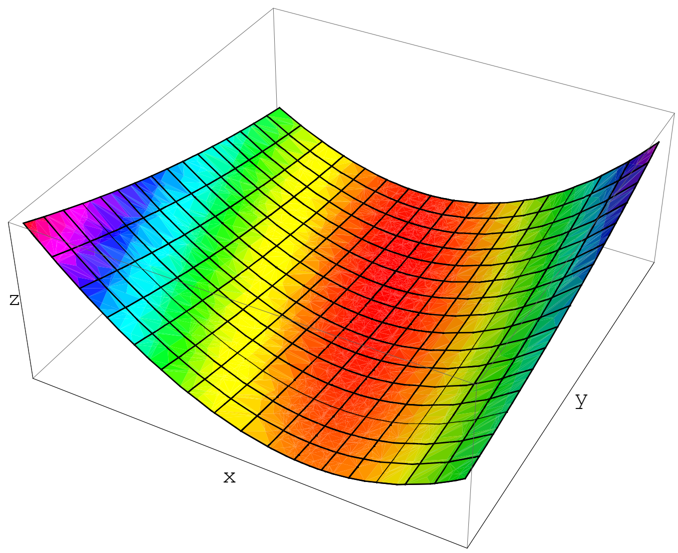

Figure 1: