Esercizio 1331
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Dopo aver verificato che il sistema di vettori:

$$\{\mathbf{v}_1 = (2, -5, 1)\,,\ \mathbf{v}_2 = (-1, 2, 3)\,, \mathbf{v}_3 = (0, 4, -2)\}\,, \tag{1}$$

è linearmente indipendente, esprimere il vettore $\mathbf{v} = (2, 3, -4)$ come combinazione lineare dei vettori 1.

***

Soluzione
Il sistema 1 è lineramente indipendente se la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ha rango 3. Calcoliamo quindi:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -26,$$

quindi $r(A) = 3$.
Ora scriviamo:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

equivalente al sistema lineare:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 0 = 2 \\ -5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = -4 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di tale sistema è la matrice 2. Quindi il sistema è di Cramer, e la sua soluzione è:

$$\lambda_1 = \frac{11}{13}, \lambda_2 = -\frac{4}{13}, \lambda_3 = \frac{51}{26}$$

Quindi:

$$\mathbf{v} = \frac{11}{13}\mathbf{v}_1 - \frac{4}{13}\mathbf{v}_2 + \frac{51}{26}\mathbf{v}_3$$

Osserviamo che $\frac{11}{13}\mathbf{v}_1$, $-\frac{4}{13}\mathbf{v}_2$, $\frac{51}{26}\mathbf{v}_3$ sono i vettori componenti di $\mathbf{v}$ secondo le direzioni dei tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.