Esercizio 1326
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare il parametro reale a affinché i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (2, a, 1-a)\,, \mathbf{v}_2 = (1, 2, -1)\,,\ \mathbf{v}_3 = (3, 1, 5)\,,$$

risultino complanari.

***

Soluzione
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ risultano complanari se sono linearmente dipendenti:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$, quindi il sistema lineare omogeneo

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_2 &= 0 \\ a\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ (1-a)\,\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

deve ammettere soluzioni non banali. Ciò implica:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & 2 & 1 \\ 1-a & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

Sviluppiamo il determinante:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & 2 & 1 \\ 1-a & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1-a & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} a & 2 \\ 1-a & -1 \end{vmatrix} \\ &= 17 - 3a \end{aligned}$$

Quindi i vettori assegnati sono complanari se e solo se $a = \frac{17}{3}$