**Esercizio 1308**
**(File scaricato da http://www.extrabyte.info)**

Due navi partono contemporaneamente da un punto $A$, dirigendosi rispettivamente verso nord e verso nord-est. Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono le velocità (costanti) delle due navi, determinare la rapidità di crescita della distanza che le separa.
Suggerimento: approssimare ad un piano la superficie su cui si muovono le navi.

***

**Soluzione**
Fissiamo un sistema di assi cartesiani $Oxy$ del piano in cui si svolge il moto delle navi, con l'origine nel punto di partenza $A$, e con l'asse $y$ orientato verso il nord.
Con tale scelta del sistema di riferimento, abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= v_1\mathbf{j} \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{v_2}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{v_2}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\end{aligned}$$

Quindi le equazioni orarie sono:

$$\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ y_1(t) = v_1 t \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2(t) = \frac{v_2}{\sqrt{2}} \\ y_1(t) = \frac{v_2}{\sqrt{2}}t \end{cases} \tag{1}$$

La distanza tra le due navi è la funzione:

$$D(x_1 y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dalle (1) segue che si tratta di una funzione composta, quindi per calcolare $\frac{dD}{dt}$ applichiamo la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned}\frac{dD}{dt} &= \frac{\partial D}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial D}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial D}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial D}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt} \\ &= \frac{1}{D}\left[(x_2 - x_1)\frac{v_2}{\sqrt{2}} + (y_2 - y_1)\left(\frac{v_2}{\sqrt{2}} - v_1\right)\right] \\ &= \frac{t}{D}\left[\frac{v_2^2}{2} + \left(\frac{v_2}{\sqrt{2}} - v_1\right)^2\right]\end{aligned}$$

La distanza $D$ in funzione di $t$:

$$D = t\sqrt{\frac{v_2^2}{2} + \left(\frac{v_2}{\sqrt{2}} - v_1\right)^2}$$

Sostituendo nella precedente:

$$\frac{dD}{dt} = \sqrt{\frac{v_2^2}{2} + \left(\frac{v_2}{\sqrt{2}} - v_1\right)^2}$$