Esercizio 1295
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Se $V(x,y)$ è una qualunque funzione parzialmente derivabile, mostrare che risulta:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2, \tag{1}$$

essendo (r,φ) le coordinate polari nel piano.

***

Soluzione
Le equazioni che ci fanno passare alle coordinate polari sono:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$$

Quindi è $V[x(r,\varphi),y(r,\varphi)]$, per cui applicando la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r}&=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dr}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dr}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial V}{\partial y}\sin\varphi \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi}&=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{d\varphi}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{d\varphi}=\frac{\partial V}{\partial x}(-r\sin\varphi)+\frac{\partial V}{\partial y}(r\cos\varphi)\end{aligned} \tag{2}$$

Dalla seconda otteniamo:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}=-\frac{\partial V}{\partial x}\sin\varphi+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi \tag{3}$$

Elevando al quadrato ambo i membri delle due equazioni (2)-(3) e sommando si ottiene:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$$