Esercizio 1292
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Due particelle compiono un moto piano con equazioni orarie date rispettivamente da:

$$\begin{aligned} &\{x_1(t) = v_{1x}t, \ \ y_1(t) = v_{1y}t\} \\ &\{x_2(t) = v_{2x}t, \ \ y_2(t) = v_{2y}t\} \end{aligned} \tag{1}$$

Determinare la velocità di variazione della distanza tra le due particelle a tutti i tempi.

***

Soluzione
La distanza tra le due particelle è:

$$D(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{2}$$

ed è quindi una funzione reale di quatto variabili reali: x_1, y_1, x_2, y_2. Dalle (1) segue che $D(x_1, y_1, x_2, y_2)$ è una funzione composta, onde:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \frac{\partial D}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial D}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial D}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial D}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt} \\ &= \frac{1}{D}\left[(x_2 - x_1)(v_{2x} - v_{1x}) + (y_2 - y_1)(v_{2y} - v_{1y})\right] \\ &= \frac{1}{D}\left[(v_{2x} - v_{1x})^2 + (v_{2y} - v_{1y})^2\right] \cdot t \end{aligned}$$

Determinando l'espressione $D(t)$ attraverso le (2)-(1):

$$\frac{dD}{dt} = \sqrt{(v_{2x} - v_{1x})^2 + (v_{2y} - v_{1y})^2}$$

Osserviamo che allo stesso risultato si perviene più rapidamente, calcolando subito l'espressione analitica di $D(t)$

$$D(t) = t\sqrt{(v_{2x} - v_{1x})^2 + (v_{2y} - v_{1y})^2}$$