Esercizio 1289
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

La temperatura assoluta di un lamina circolare è data in funzione delle coordinate cartesiane (la cui origine e nel centro della lamina):

$$T(x,y) = \frac{C}{x^2 + y^2 + 2}, \tag{1}$$

essendo C una costante. Determinare la velocità di variazione di T nella direzione formante un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ con l'asse x. Si valuti tale velocità nel punto $P(1,2)$.

***

Soluzione
Il versore $\mathbf{n}$ della direzione assegnata è:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \cos\frac{\pi}{3}\mathbf{i} + \sin\frac{\pi}{3}\mathbf{j} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\end{aligned}$$

La velocità di variazione di T nella direzione assegnata, altro non è che la derivata della funzione $T(x,y)$ secondo tale direzione, onde:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla T,$$

essendo ∇T il gradiente di T:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j}$$

Le derivate sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{2Cx}{(x^2 + y^2 + 2)^2} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= -\frac{2Cy}{(x^2 + y^2 + 2)^2}\end{aligned}$$

Quindi

$$\nabla T = -\frac{2C}{(x^2 + y^2 + 2)^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \qquad \mathrm{K}\,/\,\mathrm{m}$$

La derivata $\frac{\partial T}{\partial n}$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{C}{(x^2 + y^2 + 2)^2}\left(x + \sqrt{3}y\right) \quad \mathrm{K}\,/\,\mathrm{m}$$

Nel punto $(1,2)$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{(1,2)} = -\frac{C}{49}\left(1+2\sqrt{3}\right) \quad \mathrm{K\,/\,m}$$

Il segno negativo ci dice che se ci spostiamo nella direzione orientata n, la temperatura della lamina dimuinisce. Infatti, l'andamento del gradiente della temperatura è riportato in figura 1.

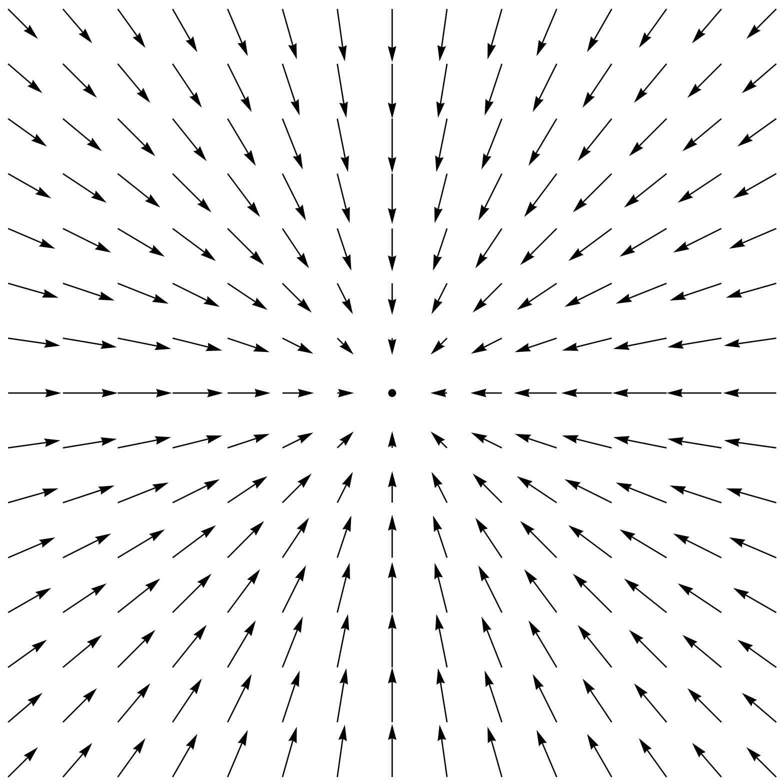

Figure 1: Gradiente del campo scalare di temperatura $T\,(x,y)$