Esercizio 1287
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnata l'equazione differenziale:

$$\mathbf{r} \cdot \nabla f = nf(x,y), \tag{1}$$

essendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, verificare che una sua soluzione è:

$$f(x,y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2}$$

con g funzione derivabile.

***

Soluzione
Esplicitiamo il prodotto scalare al primo membro della (1):

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$$

Dobbiamo calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y)$ data dalla (2). A tale scopo poniamo $\xi = \frac{y}{x}$, qundi:

$$f(x,y) = x^n g[\xi(x,y)]$$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= nx^{n-1}g(\xi) + x^n g'(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial x} \\
&= nx^{n-1}g\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-2}yg'\left(\frac{y}{x}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^n g'(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial y} = x^{n-1}g'\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

Cioè:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = nx^n g\left(\frac{y}{x}\right),$$

da cui l'asserto.