Esercizio 1281
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Verificare che la funzione

$$f(x,t) = A\sin(\lambda ct + \phi)\sin\lambda x, \tag{1}$$

è una soluzione dell'equazione della corda vibrante:

$$\Box^2 f = 0$$

***

Soluzione
Ricordiamo che il delambertiano $\Box^2$ è dato da:

$$\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Nel caso di una propagazione unidimensionale (orientando l'asse x in tale direzione):

$$\Box^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Ciò premesso, calcoliamo le derivate parziali di f:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= A\lambda\sin(\lambda ct + \phi)\cos\lambda x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -A\lambda^2\sin(\lambda ct + \phi)\sin\lambda x \\
\frac{\partial f}{\partial t} &= A\lambda c\cos(\lambda ct + \phi)\sin\lambda x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -A\lambda^2 c^2\sin(\lambda ct + \phi)\sin\lambda x \\
&= c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&\Longrightarrow \Box^2 f = 0
\end{aligned}$$