

Esercizio 1246
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Determinare il determinante Jacobiano della trasformazione dalle coordinate cartesiane del piano (x, y) alle coordinate polari (r, φ) .

Soluzione

Le equazioni di trasformazione sono:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Il determinante Jacobiano è:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \varphi, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \cos \varphi \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$