Esercizio 1241
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnata la funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}} \tag{1}$$

Determinare:

1. Insieme di definizione
2. Eventuali punti di discontinuità
3. $f_x(1,1)$, $f_y(1,1)$.

***

Soluzione
La funzione è definita per (x,y) tali che:

$$xy + \frac{x}{y} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{xy^2 + x}{y} \geq 0$$

Abbiamo:

1. $y > 0 \Longrightarrow xy^2 + x \geq 0 \Longleftrightarrow (x,y) \in S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty\}$
2. $y < 0 \Longrightarrow xy^2 + x \leq 0 \Longleftrightarrow (x,y) \in S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x \leq 0, \quad -\infty < y < 0\}$

L'insieme di definizione è:

$$X = S_1 \cup S_2,$$

che è l'unione del I e III quadrante, escludendo l'asse x. Quest'ultimo è un insieme di singolarità per f. Infatti, preso ad arbitrio $x_0 > 0$ e $x_0' < 0$:

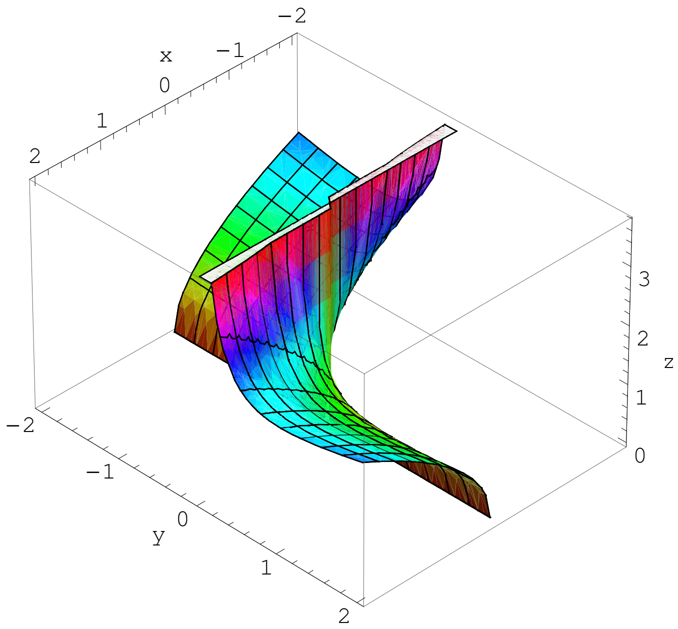
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0^+}} \sqrt{xy + \frac{x}{y}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0' \\ y \to 0^-}} \sqrt{xy + \frac{x}{y}} = +\infty$$

Osserviamo che non esiste il limite per $(x,y) \to (0,0)$. Per mostrare ciò passiamo a coordinate polari:

$$f(r,\varphi) = \sqrt{\frac{r^2}{2}\sin 2\varphi + \cot\varphi} \underset{r \to 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{\cot\varphi}$$

Cioè il limite per $r \to 0^+$ viene a dipendere dal valore della variabile angolare φ. Ciò implica che non esiste il limite per $(x,y) \to (0,0)$.



Calcoliamo le derivate parziali:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}} \cdot \left(y+\frac{1}{y}\right) \\
&= \frac{y^2+1}{2yf(x,y)} \\
f_y(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}} \cdot \left(x-\frac{x}{y^2}\right) \\
&= \frac{x\left(y^2-1\right)}{2y^2 f(x,y)}
\end{aligned}
$$

Da cui:

$$
f_x(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_y(x,y) = 0
$$