

Esercizio 1213
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la sommabilità della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^k}, \quad k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad (1)$$

nell'intervallo $A = [2, +\infty)$.

Soluzione

Osserviamo che la funzione è continua nell'intervallo illimitato A . Inoltre non cambia segno in tale intervallo, risultando ivi $f(x) > 0$, per cui:

$$\int_A f(x) dx \leq +\infty$$

Inoltre, la funzione è infinitesima all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k} = 0$$

Vediamo allora se tale infinitesimo è dotato di ordine. Assumiamo come infinitesimo campo la funzione $u(x) = \frac{1}{x}$, quindi calcoliamo:

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(\ln x)^k}$$

Se $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{k \cdot (\ln x)^{k-1} \frac{1}{x}} = \frac{\alpha-1}{k} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(\ln x)^{k-1}} \\ &= \frac{(\alpha-1)^2}{k(k-1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(\ln x)^{k-2}} \\ &= \dots = \frac{(\alpha-1)^2}{k!} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = +\infty \end{aligned}$$

Se $\alpha = 1$:

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln x)^k} = +\infty$$

Se $0 < \alpha < 1$:

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1-\alpha} (\ln x)^k} = 0^+$$

Riassumendo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \alpha < 1 : \\ +\infty, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Si conclude che la funzione assegnata è per $x \rightarrow +\infty$, un infinitesimo di ordine superiore a 1, ma inferiore ad ogni $\alpha > 1$. Quindi tale infinitesimo non è dotato di ordine, per cui non possiamo applicare i noti criteri di sommabilità. Siccome la funzione è integrabile, l'unico modo per studiare la sua sommabilità consiste nel calcolare il limite:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^n \frac{dx}{x (\ln x)^k}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} I_k(n) &= \int_2^n \frac{dx}{x (\ln x)^k} = \int_2^n \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^k} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-k} (\ln x)^{1-k} \Big|_2^n, & \text{se } k > 1 \\ \ln |\ln x| \Big|_2^n, & \text{se } k = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-k} \left[\frac{1}{(\ln x)^{k-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{k-1}} \right], & \text{se } k > 1 \\ \ln |\ln n| - \ln |\ln 2|, & \text{se } k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^k} = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}, & \text{se } k > 1 \\ +\infty, & \text{se } k = 1 \end{cases}$$