

Esercizio 1184
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Determinare il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad (1)$$

al variare del parametro reale a .

Soluzione

La matrice è quadrata di ordine 3, per cui:

$$1 \leq r(A) \leq 3$$

Il determinante di A è:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - 3a + 2 = (a + 2)(a - 1)^2$$

Determiniamo per quali valori di a si annulla $\det A$

$$\det A = 0 \iff (a + 2)(a - 1)^2 = 0 \iff a = 1, -2$$

Quindi:

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}, \quad r(A) = 3$$

Per $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies r(A) = 1$$

Per $a = -2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad r(A) = 2$$