

Esercizio 1183
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Determinare il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -a & -1 \\ a & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

al variare del parametro reale a .

Soluzione

La matrice è quadrata di ordine 3, per cui:

$$1 \leq r(A) \leq 3$$

Il determinante di A è:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -a & -1 \\ a & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3a^2 + 2a + 1$$

Determiniamo per quali valori di a si annulla $\det A$

$$\det A = 0 \iff 3a^2 - 2a - 1 = 0 \iff a = -\frac{1}{3}, 1$$

Quindi:

$$\forall a \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}, 1 \right\}, \quad r(A) = 3$$

Per $a = -\frac{1}{3}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} 4 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad r(A) = 2$$

Per $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad r(A) = 2$$