

Esercizio 1179
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{\pi/2}^{2\pi} x |\sin x| dx \tag{1}$$

Soluzione

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right) &\implies |\sin x| = \sin x \\ x \in [\pi, 2\pi] &\implies |\sin x| = -\sin x \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int_{\pi/2}^{2\pi} x |\sin x| dx = \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx$$

Anzichè calcolare singolarmente i due integrali a secondo membro, calcoliamo una volta per tutte la primitiva di $x \sin x$:

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int x \sin x dx,$$

attraverso un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x d(-\cos x) = -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{2\pi} x |\sin x| dx &= F(x)|_{\pi/2}^{\pi} - F(x)|_{\pi}^{2\pi} \\ &= \pi - 1 - (0 - 2\pi - \pi) \\ &= 4\pi - 1 \end{aligned}$$