

Esercizio 1178
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^3 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \tag{1}$$

Soluzione

Eseguiamo il cambio di variabile $\sqrt{x} = t$, per cui:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto a t sono tali che:

$$0 \leq x = t^2 \leq 3,$$

cioè:

$$0 \leq t \leq \sqrt{3}$$

Quindi l'integrale si calcola per parti

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \arctan t dt \\ &= 2 \left(t \arctan t \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t dt}{t^2 + 1} \right) \\ &= 2 \left(\sqrt{3} \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln (t^2 + 1) \Big|_0^{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \ln 4 \end{aligned}$$