

Esercizio 1170
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la sommabilità della funzione

$$f(x) = \ln(\sin x) \quad (1)$$

nell'intervallo $A = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Soluzione

La funzione è generalmente continua in A con una singolarità (punto di infinito) in $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin x) = \ln 0^+ = -\infty$$

Osserviamo poi che la funzione ha segno costante in A , precisamente è $f(x) \leq 0 \forall x \in A$, per cui la funzione è ivi integrabile. Per lo studio della sommabilità scriviamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\sin x) - \ln x + \ln x \\ &= \varphi(x) + \psi(x), \end{aligned}$$

avendo posto per definizione:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\stackrel{def}{=} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \\ \psi(x) &\stackrel{def}{=} \ln x \end{aligned}$$

La funzione $\varphi(x)$ ha nel punto $x = 0$ una discontinuità eliminabile, poiché:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \ln 1 = 0,$$

per cui essa è certamente sommabile in A .

La funzione $\psi(x)$ è a sua volta sommabile in A . Da ciò segue che la funzione assegnata è ivi sommabile, in quanto combinazione lineare di funzioni sommabili.

Per il calcolo dell'integrale definito, osserviamo che la primitiva di $f(x)$ non è esprimibile elementarmente. Tuttavia, l'integrale si calcola attraverso un artificio. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin \frac{x}{2}\right) dx + \int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos \frac{x}{2}\right) dx \end{aligned} \quad (2)$$

Nell'integrale $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right) dx$ eseguiamo il cambio di variabile $x = \pi - t$, per cui:

$$\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) = \sin\frac{t}{2}; \quad dx = -dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto a t sono tali che:

$$\begin{aligned} 0 \leq x = \pi - t &\leq \frac{\pi}{2} \\ \pi \geq t &\geq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right) dx = -\int_{\pi}^{\pi/2} \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right) dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right) dt$$

Sostituendo nella (2):

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) dx \end{aligned}$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $x = 2t$, per cui:

$$dx = 2dt$$

Quindi:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$$

Ricavando $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

Questo risultato è noto come *integrale di Eulero*.