Esercizio 1164
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{-1/2}^{4/5} \frac{|x(x-1)|}{x^2-1}dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Per esplicitare il valore assoluto osserviamo che:

$$x(x-1) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty),$$

per cui:

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \Longrightarrow |x(x-1)| = x(x-1)$$
$$x \in \left(0, \frac{4}{5}\right] \Longrightarrow |x(x-1)| = -x(x-1)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{4/5} \frac{|x(x-1)|}{x^2-1}dx &= \int_{-1/2}^{0} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}dx - \int_{0}^{4/5} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}dx \\
&= \int_{-1/2}^{0} \frac{xdx}{x+1} - \int_{0}^{4/5} \frac{xdx}{x+1} \\
&= \int_{-1/2}^{0} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx - \int_{0}^{4/5} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= [x - \ln(x+1)]_{-1/2}^{0} - [x - \ln(x+1)]_{0}^{4/5} \\
&= -\left(-\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{5} - \ln\frac{9}{5}\right) \\
&= \ln\frac{9}{10} - \frac{3}{5}
\end{aligned}$$