

**Esercizio 1162**  
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la sommabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad (1)$$

nell'intervallo  $A = [0, 1]$  ed in caso affermativo, determinare il corrispondente integrale.

\*\*\*

**Soluzione**

La funzione assegnata è generalmente continua in  $A$ , avendo un punto singolare in  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Determiniamo quindi l'ordine di infinito, assumendo come infinito di riferimento la funzione  $v(x) = \frac{1}{|x|}$ . Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{v(x)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^\alpha \frac{|\ln x|}{x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \ln x \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{1-\alpha}} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ \frac{\infty}{\infty}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Rimuoviamo la forma indeterminata che si presenta nel caso  $\alpha > 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{v(x)^\alpha} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{1-\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} - \frac{1}{1-\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} = 0$$

Riassumendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{v(x)^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ \frac{\infty}{\infty}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \quad (2)$$

Dalla (2) segue per  $x \rightarrow 0^+$ , la funzione  $f(x)$  è un infinito di ordine superiore a 1, poiché per  $\alpha = 1$  è  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{v(x)^\alpha} = +\infty$ , ma è inferiore a un qualunque  $\alpha > 1$ , poiché per  $\alpha > 1$  è  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{v(x)^\alpha} = 0$ . Si conclude che per  $x \rightarrow 0^+$ , la funzione  $f(x)$  è un infinito non dotato di ordine. Ciò implica che non possiamo applicare il criterio di sommabilità basato sull'ordine di infinito. Allora osserviamo che

$$\forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \quad \left| \frac{\ln x}{x} \right| \geq \frac{\ln 2}{x} \quad (3)$$

Infatti:

$$\forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \quad |\ln x| \geq \ln 2 \quad (4)$$

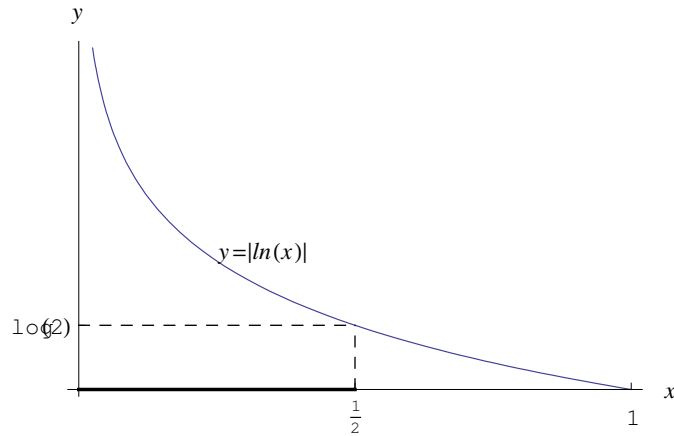


Figure 1:

Ciò è visibile graficamente in fig. 1

La (4) implica automaticamente la (3). Siccome  $\frac{\ln 2}{x}$  non è sommabile in  $[0, \frac{1}{2}]$ , in quanto tale funzione è in  $x = 0$  un infinito di ordine 1, segue per un noto criterio:

$$\begin{aligned} \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \frac{\ln 2}{x} \leq |f(x)| &\implies \left(f(x) \text{ non è sommabile in } \left[0, \frac{1}{2}\right] \subset A\right) \\ &\implies (f(x) \text{ non è sommabile in } A) \end{aligned}$$

Si conclude che la funzione assegnata non è sommabile. La funzione risulta comunque integrabile, in quanto di segno costante in  $A$ , quindi:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx = -\infty$$