

**Esercizio 1161**  
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la sommabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2},$$

nell'intervallo  $A = [0, 1]$  ed in caso affermativo, determinare il corrispondente integrale.

\*\*\*

**Soluzione**

La funzione non è definita in  $x = 0$ , per cui studiamo il suo comportamento in un intorno di tale punto.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, eseguiamo il cambio di variabile  $x = \frac{1}{t}$ , onde:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0^+,$$

poiché  $e^t$  è, per  $t \rightarrow +\infty$ , un infinito di ordine infinitamente grande. Passiamo al limite per  $x \rightarrow 0^-$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Quindi  $x = 0$  è una discontinuità di seconda specie. Precisamente, la funzione è infinita a sinistra ed infinitesima a destra. Siccome stiamo considerando la sommabilità in  $[0, 1]$ , ci limitiamo al comportamento a destra, per cui possiamo scrivere:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{x^2}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0^+ \end{cases}$$

Allora la funzione risulta sommabile in  $A = [0, 1]$ . Infatti, non c'è bisogno di applicare i criteri di sommabilità, poiché questi ultimi sono sufficienti per la sommabilità, ma non necessari. Il <corrispondente integrale si calcola con la solita operazione di passaggio al limite, che in questo caso si scrive:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{-1/x} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{e} - e^{-\infty} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$