

Esercizio 1160
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la sommabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}},$$

nell'intervallo $A = [0, 1]$ ed in caso affermativo, determinare il corrispondente integrale.

Soluzione

La funzione è generalmente continua in A , avendo un punto singolare in $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

Inoltre, la funzione ha segno costante in A , per cui è ivi integrabile. Per la sommabilità, calcoliamo l'ordine di infinito della funzione in $x = 1$, assunto come infinito di riferimento $v(x) = \frac{1}{|x-1|}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|f(x)|}{v(x)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} |x-1|^\alpha |f(x)| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1-x)^{\alpha-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{1+x}} = l \in (0, +\infty) \iff \alpha = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Cioè, per $x \rightarrow 0$, la funzione è un infinito di ordine < 1 . Si conclude che la funzione è sommabile in A .

Ora calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I(\varepsilon),$$

essendo:

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt[3]{1-x^2}} \\ &= -\frac{3}{4} (1-x^2)^{3/2} \Big|_0^{1-\varepsilon} = -\frac{3}{4} \left[\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} - 1 \right], \end{aligned}$$

onde:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{3}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} - 1 \right] = \frac{3}{4}$$

Conviene determinare una qualunque primitiva:

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned} x(1-x) &= -(x+k)^2 + l = -x^2 - 2kx - k^2 + l \\ \implies k &= -\frac{1}{2}, l = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

cioè:

$$x(1-x) = \frac{1}{4} [1 - (2x-1)^2],$$

cosicchè:

$$F(x) = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x-1)^2}} = \arcsin(2x-1) + C$$

Siamo ora in grado di calcolare $I(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= F(1-\varepsilon) - F(\varepsilon) \\ &= 2 \arcsin(1-2\varepsilon), \end{aligned}$$

da cui il risultato:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arcsin(1-2\varepsilon) = \pi$$